



Σχολή Επιστημών Υγείας και Πρόνοιας

Τμήμα Βιοϊατρικών Επιστημών

Σχολή Διοικητικών, Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών

Τμήμα Αγωγής και Φροντίδας στην Πρώιμη Παιδική Ηλικία



Παιδαγωγικό τμήμα



Διδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Παιδαγωγική μέσω Καινοτόμων Τεχνολογιών και Βιοϊατρικών

Προσεγγίσεων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Εφαρμογή, υλοποίηση και αξιολόγηση εκπαιδευτικού προγράμματος
για τη διδασκαλία των κλασμάτων στα μαθηματικά της Ε΄ Δημοτικού
με την αξιοποίηση του λογισμικού Geogebra**

**Application, implementation and evaluation of an educational program
for the teaching of fractions in mathematics of the 5th Primary School
with the utilization of Geogebra software**



ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑΣ

Νικολίτσα Κεφαληνού

Nikolitsa Kefalinou

ΟΝΟΜΑ ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

Παναγιώτης Πήλιουρας

Panagiotis Piliouras

ΑΙΓΑΛΕΩ/ΑΙΓΑΛΕΟ 2020

POST GRADUATE THESIS

**Application, implementation and evaluation of an educational program for
the teaching of fractions in mathematics of the 5th Primary School with the
utilization of Geogebra software**

Nikolitsa Kefalinou

A.M.: 18030

nikolitsa10@gmail.com

FIRST SUPERVISOR

Panagiotis Piliouras

SECOND SUPERVISOR

Evaggelia (Lilian) Antoniou



Faculty of Health and Caring Professions

Department of Biomedical Sciences

Faculty of Administrative, Financial and Social Sciences

Department of Early Childhood Education and Care



Department of Pedagogy



Inter-Institutional Post Graduate Program

Pedagogy through innovative Technologies and Biomedical approaches

Δήλωση περί λογοκλοπής

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας διπλωματικής εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην διπλωματική μου εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η διπλωματική εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι αναλαμβάνω, πλήρως, όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

Νικολίτσα Κεφαληνού

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Παιδαγωγικά μέσω Καινοτόμων Προσεγγίσεων, Τεχνολογίες και Εκπαίδευση» του Τμήματος Αγωγής και Φροντίδας στην Πρώιμη Παιδική Ηλικία του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής. Για τη συγγραφή της εργασίας αυτής έχουν συνεισφέρει μια σειρά ανθρώπων, στους οποίους θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου.

Καταρχάς, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω, ιδιαιτέρως, τον ερευνητή και καθηγητή του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής κύριο Πήλιουρα Παναγιώτη, επιβλέποντα καθηγητή της ερευνητικής μου εργασίας, ο οποίος υποστήριξε και συνέβαλε τα μέγιστα για την ολοκλήρωση αυτής, με τις πολύτιμες συμβουλές και την καθοδήγηση που παρείχε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας. Χωρίς την ανεκτίμητη βοήθειά του και την ιδιαίτερη συμβολή του, οι δυσκολίες θα ήταν ανυπέρβλητες. Τον ευχαριστώ ολόψυχα.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα, επίσης, να απευθύνω και στα άλλα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, την καθηγήτρια κυρία Αντωνίου Ευαγγελία για τις σημαντικές υποδείξεις και το ενδιαφέρον που έδειξε και την καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής και πρόεδρο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος κυρία Παπαγεωργίου Ευσταθία για τη συνολική υποστήριξη που παρείχε κατά τη διάρκεια των συγκεκριμένων σπουδών.

Ευχαριστίες εκφράζονται και προς όλες τις καθηγήτριες και όλους τους καθηγητές μου στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα, οι οποίοι συντέλεσαν στο υπέροχο αυτό ταξίδι που ως στόχο είχε την περαιτέρω κατάρτισή μου και τη διεύρυνση του γνωστικού μου ορίζοντα.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ θα ήθελα να απευθύνω και στον Διευθυντή του 144^{ου} Δημοτικού Σχολείου Αθηνών και τον Σύλλογο Διδασκόντων του για τη συγκατάθεσή τους. Επιπρόσθετα, ευχαριστώ από καρδιάς τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα και τους γονείς τους για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν και την εποικοδομητική συνεργασία μας. Χωρίς τις μαθήτριες και τους μαθητές, το ταξίδι δε θα είχε καν αρχίσει.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στην οικογένειά μου, διότι χωρίς την υποστήριξη, την παρότρυνση και τη συμπαράστασή τους, η παρούσα εργασία δε θα είχε υλοποιηθεί.

Αφιερώσεις

Στην οικογένειά μου, στις μαθήτριες και τους μαθητές μου!

Περίληψη

Εισαγωγή: Μέσα από τη βιβλιογραφική επισκόπηση ποικίλων ερευνών που έχουν διεξαχθεί τα τελευταία χρόνια, τόσο σε εθνικό όσο και σε διεθνές επίπεδο, προκύπτει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές παρανοήσεις και δυσκολίες σχετικά με την κατανόηση των κλασμάτων, όπως αυτά διδάσκονται, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα, στο Δημοτικό Σχολείο. Με αφορμή αυτή τη διαπίστωση, επιλέξαμε να πραγματοποιήσουμε μελέτη, προκειμένου να διερευνήσουμε αν η χρήση των νέων τεχνολογιών βοηθά και σε ποιο βαθμό να ξεπεραστούν τα εμπόδια, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η κατανόηση και να αυξηθεί η απόδοση των μαθητών στα μαθηματικά.

Σκοπός: Η αξιολόγηση της χρησιμότητας και της συνεισφοράς των ψηφιακών εφαρμογών στη μαθησιακή διαδικασία, ως υποστηρικτικό εργαλείο για τη διδασκαλία των κλασμάτων.

Μέθοδος: Για τις ανάγκες της εν λόγω εργασίας, πραγματοποιήθηκε ποιοτική έρευνα στην οποία συμμετείχαν δέκα συνολικά μαθήτριες και μαθητές της Ε΄ τάξης δημοτικού. Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν οι απαντήσεις και τα σχόλια των συμμετεχόντων στις ερωτήσεις της ερευνήτριας μέσα από ομαδικές και ατομικές συνεντεύξεις.

Αποτελέσματα: Τα παιδιά αναγνώρισαν τον ψυχαγωγικό-διασκεδαστικό και πρακτικό-λειτουργικό χαρακτήρα του προγράμματος. Μέσα από την πρόκληση του ενδιαφέροντος, ενεργοποιήθηκαν μαθησιακοί μηχανισμοί, όπως η κινητοποίηση, η εσωτερική παρώθηση και η διατήρηση της προσοχής, που οδήγησαν στη βελτιστοποίηση της μάθησης. Άλλοι παράγοντες της διδασκαλίας που δέχτηκαν τη θετική επίδραση, την οποία φαίνεται ότι ασκεί η χρήση του ψηφιακού προγράμματος, είναι, από τη μια, το κλίμα της τάξης, μέσα από την προώθηση της συνεργασίας και της ομαδικής εργασίας των μαθητών και, από την άλλη, ο ρόλος του δασκάλου που φαίνεται ότι αλλάζει.

Συμπεράσματα: Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι ψηφιακές εφαρμογές ωφελούν κατά πολύ τη μαθησιακή διαδικασία και υποστηρίζουν γνωστικά τους μαθητές να κατανοήσουν τα κλάσματα, αφού ξεπεράσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν. Όσον αφορά τον εκπαιδευτικό, προκύπτει ότι ενισχύουν τον διδακτικό του ρόλο και αποτελούν υποστηρικτικό εργαλείο με απώτερο στόχο τη βελτιστοποίηση του διδακτικού του έργου. Αυτό δημιουργεί τις συνθήκες για την προσπέλαση των μαθησιακών εμποδίων, την αλλαγή του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας εμπλουτίζοντάς τον με νέα τεχνολογικά μέσα και τη δημιουργία θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

Λέξεις-κλειδιά:

Νέες τεχνολογίες, κλάσματα, ψηφιακό περιβάλλον, παιδιά και μαθηματικά

Abstract

Introduction: The literature review of various studies conducted in recent years, both nationally and internationally, shows that students face many misunderstandings and difficulties in understanding the fractions, as they are taught, according to the Curriculum in elementary school. On this occasion, we chose to conduct a study to investigate whether the use of new technologies helps and to what extent to overcome obstacles, so as to maximize understanding and increase students' performance in mathematics.

Purpose: The evaluation of the usefulness and contribution of digital applications in the learning process, as a supportive tool for teaching fractions.

Method: For the needs of this work, a qualitative research was carried out in which a total of ten primary school students participated. The data of the research were the answers and the comments of the participants in the questions of the researcher through group and individual interviews.

Results: The children recognized the entertaining-fun and the practical-functional nature of the program. Through the challenge of interest, learning mechanisms were activated, such as mobilization, internal motivation and attention keeping, which led to the optimization of learning. Other teaching factors that have had a positive effect of the use of the digital program are, on the one hand, the climate of the classroom through the promotion of student collaboration and teamwork, and, on the other, the teacher's role who seems to be changing.

Discussion: The general conclusion that emerges is that digital applications greatly benefit the learning process and cognitively support students to understand the fractions, after overcoming the difficulties they face. As far as the teacher is concerned, it turns out that they strengthen his teaching role and are a supportive tool with the ultimate goal of optimizing his teaching work. This creates the conditions for accessing learning barriers, changing the traditional way of teaching by enriching it with new technological means and creating a positive attitude of students towards Mathematics.

Keywords:

New technologies, fractions, digital environment, child and mathematics

Περιεχόμενα

Δήλωση περί λογοκλοπής	iv
Ευχαριστίες	vi
Αφιερώσεις.....	viii
Περίληψη	x
Abstract.....	xiii
Συντομογραφίες.....	xvii
Εισαγωγή.....	3
1. Βιβλιογραφική Επισκόπηση	7
1.1. Διδακτική Μαθηματικών.....	7
1.1.1. Ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη των Μαθηματικών	7
1.1.2. Η εκπαίδευση και οι σκοποί της.....	10
1.1.3. Η Μαθηματική Εκπαίδευση	13
1.1.3.1. Η έννοια της Μαθηματικής Εκπαίδευσης	13
1.1.3.2. Η εξέλιξη της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.....	14
1.1.3.3. Η Μαθηματική Εκπαίδευση στην Ελλάδα	17
1.1.3.4. Η θέση της Διδακτικής Μαθηματικών στην Ελλάδα.....	19
1.1.4 Γενικοί σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών	20
1.1.5. Δομικά στοιχεία της Διδακτικής Μαθηματικών	22
1.1.6. Θεωρίες μάθησης των Μαθηματικών.....	28
1.2. Τα κλάσματα.....	38
1.2.1. Η έννοια και οι ερμηνείες του κλάσματος.....	38
1.2.2. Ανάπτυξη της έννοιας των κλασμάτων	40
1.2.3. Δυσκολίες και παρανοήσεις στην κατανόηση των κλασμάτων.....	41
1.2.4. Επισκόπηση ερευνών σχετικών με τη διδασκαλία των κλασμάτων	43
1.2.5. Μορφές αναπαράστασης κλασμάτων και ο ρόλος τους στη μαθησιακή διαδικασία	47
1.2.6. Οι άτυπες γνώσεις των μαθητών και ο ρόλος τους στη διδασκαλία των κλασμάτων.....	51
1.3. Οι νέες τεχνολογίες (ΤΠΕ) ως εργαλείο μάθησης	52
2. Μεθοδολογία	59
2.1. Ερευνητικά ερωτήματα.....	59
2.2. Η επιλογή της μεθόδου.....	59
2.3. Αφετηρία-Συμμετέχοντες.....	61

2.4. Μέθοδος και εργαλεία συλλογής δεδομένων	62
2.5. Οδηγός Συνέντευξης.....	63
2.6. Πλαίσιο και Σχεδιασμός.....	64
2.7 Πλαίσιο ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων	74
2.8 Σημεία ελέγχου και αξιοπιστίας της έρευνας	75
3. Ευρήματα	76
3.1 Εντοπώσεις και εκτιμήσεις των παιδιών από την εφαρμογή του προγράμματος	77
3.1.1. Ψυχαγωγία	77
3.1.2 Χρησιμότητα-Ευχρηστία.....	78
3.1.3 Μαθησιακή υποστήριξη	80
3.1.3.1 Κατανόηση.....	80
3.1.3.2. Κατασκευή νοημάτων.....	82
3.2. Συνεργασία και ομαδικότητα.....	83
3.3. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού.....	86
3.3.1. Ποιος είναι ο ρόλος του εκπαιδευτικού;.....	86
3.3.2. Πώς υποστηρίζεται ο ρόλος του εκπαιδευτικού από την εφαρμογή του προγράμματος;	88
3.4. Τα Μαθηματικά μέσα από την υλοποίηση του ψηφιακού προγράμματος και τις Νέες Τεχνολογίες	89
3.4.1. Σύγκριση με το παραδοσιακό μάθημα.....	89
3.4.2. Προτάσεις για μελλοντική εκπαιδευτική χρήση των Νέων Τεχνολογιών...90	
4. Συζήτηση-Συμπεράσματα.....	91
4.1 Γνωστική υποστήριξη	91
5. Περιορισμοί της έρευνας.....	95
5.1. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα.....	96
Βιβλιογραφικές Αναφορές	97
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ.....	108
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Ενημερωτικό σημείωμα και συγκατάθεση γονέα	108
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Οδηγός συνέντευξης-Απομαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις.....	109
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Θεματικοί άξονες, κατηγορίες και υποκατηγορίες αποτελεσμάτων	139
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Φύλλα εργασίας μαθητών	140
Πηγές Εικόνων	150

Συντομογραφίες

	Αγγλική ορολογία	Ελληνική ορολογία
Ο.Ε.Ε.Σ.	Organisation for European Economic Co-operation	Οργανισμός για την Ευρωπαϊκή Οικονομική Συνεργασία
Ο.Ο.Σ.Α.	Organisation for Economic Co-operation and Development	Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης
Τ.Π.Ε.	Information and Communication Technology	Τεχνολογία Πληροφοριών και Επικοινωνίας
Ε.Π.Λ.	Unified Multidisciplinary High School	Ενιαίο Πολυκλαδικό Λύκειο
Α/θμια	Primary	Πρωτοβάθμια
ΑΠ	Detailed Program	Αναλυτικό Πρόγραμμα
Βλ.	See	Βλέπε
Εικ.	Image	Εικόνα
Σελ.	Page	Σελίδα
κ.ά.	etc.	και άλλα

Πίνακας περιεχομένων εικόνων

Εικόνα 1. Μοντέλο επιφάνειας.....	49
Εικόνα 2. Αριθμητικές γραμμές	50
Εικόνα 3. Το κουτί των κλασμάτων	50
Εικόνα 4. Κλάσματα στην αριθμογραμμή	67
Εικόνα 5. Μοντέλο επιφάνεια	68
Εικόνα 6. Καταχρηστικά κλάσματα και μεικτοί αριθμοί.....	69
Εικόνα 7. Καταχρηστικά κλάσματα και μεικτοί αριθμοί στην αριθμογραμμή.....	70
Εικόνα 8: Αναπαράσταση μεικτού αριθμού.....	70
Εικόνα 9: Μετατροπή του μεικτού σε κλάσμα (βήμα 1)	71
Εικόνα 10. Μετατροπή του μεικτού σε κλάσμα (βήμα 2)	71
Εικόνα 11. Σχηματισμός ισοδύναμων κλασμάτων.....	72
Εικόνα 12. Πειραματισμός με τα κλάσματα	72
Εικόνα 13. Σύγκριση κλασμάτων με αριθμογραμμή.....	73
Εικόνα 14. Σύγκριση κλασμάτων με μοντέλο κύκλος.....	74
Εικόνα 15. Σύγκριση κλασμάτων με μοντέλο μπάρα και αριθμογραμμή	74

Πρόλογος

Τα κλάσματα θεωρούνται ένα από τα πιο δύσκολα κεφάλαια που διδάσκονται οι μαθητές στο δημοτικό σχολείο. Αυτό προκύπτει τόσο από τη βιβλιογραφική επισκόπηση όσο και από τη διδακτική μας εμπειρία στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η ελλιπής κατανόηση που δημιουργείται, οδηγεί σε περαιτέρω δυσκολίες με αποτέλεσμα τα Μαθηματικά να φαντάζουν σε μαθητές και γονείς ως ένας χώρος ιδιαίτερα δύσκολος και δυσνόητος.

Σε μια κοινωνία που εξελίσσεται διαρκώς, το σχολείο το οποίο αποτελεί έναν ζωντανό οργανισμό θα πρέπει να εκσυγχρονίζεται ώστε να επικοινωνεί μαζί της, αλλά και να αλληλοτροφοδοτείται από την κοινωνία, στην οποία συμμετέχει. Συγκεκριμένα, τα Μαθηματικά πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα και τις εμπειρίες των παιδιών. Μέσα στο πλαίσιο αυτό, η διδασκαλία ανανεώνεται και προσαρμόζεται κάθε φορά στα νέα κοινωνικά και επιστημονικά δεδομένα, καθώς οι παραδοσιακές μέθοδοι διδασκαλίας δεν επαρκούν, για να καλύψουν τις μαθησιακές ανάγκες των μαθητών της σύγχρονης κοινωνίας.

Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα υλοποιήσουμε ένα εκπαιδευτικό ψηφιακό πρόγραμμα για τη διδασκαλία των κλασμάτων, σε συσχέτιση και με το μάθημα «Τεχνολογία και Διδακτική Μαθηματικών στην Α/θμια Εκπαίδευση» που εντάσσεται στο πλαίσιο του παρόντος μεταπτυχιακού προγράμματος. Σκοπός του προγράμματος αυτού είναι, αφενός, να βοηθήσει τους μαθητές να γνωρίσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων και να κατανοήσουν τον πολυδιάστατο χαρακτήρα τους και, αφετέρου, να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό, ώστε να κάνει τη διδασκαλία του πιο ελκυστική, πιο παιγνιώδη και πιο κοντά στις ανάγκες και τις επιθυμίες των μαθητών του, άρα πιο αποτελεσματική.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από δύο μέρη: το θεωρητικό και το ερευνητικό. Στο θεωρητικό μέρος γίνεται βιβλιογραφική επισκόπηση που αφορά: τη Διδακτική Μαθηματικών και τις θεωρίες Μαθηματικής Εκπαίδευσης, την έννοια του κλάσματος, τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές, καθώς και τα λάθη που κάνουν όσον αφορά την κατανόηση των κλασμάτων. Επιπρόσθετα, αναφέρονται οι διδακτικές προσεγγίσεις στα κλάσματα και τι ρόλο παίζουν οι άτυπες γνώσεις των παιδιών. Επίσης, παραθέτουμε τα είδη των αναπαραστάσεων που συνδέονται με αυτά. Στο τρίτο κεφάλαιο του θεωρητικού μέρους εξετάζουμε πώς συνδέονται τα Μαθηματικά με τους Υπολογιστές και αναφέρονται οι διδακτικές αρχές στις οποίες βασίζονται οι ηλεκτρονικές εφαρμογές που έχουν αναπτυχθεί για την ενότητα των κλασμάτων. Ο στόχος είναι να κατανοήσουμε τι και πώς διδάσκονται οι Έλληνες μαθητές όσον αφορά τους κλασματικούς αριθμούς, ποιες είναι οι δυσκολίες που

συναντούν και ποιες είναι οι συνθήκες που οδηγούν στην εκτεταμένη χρήση της τεχνολογίας ως βοηθητικού εργαλείου για τη διδασκαλία.

Στο δεύτερο μέρος, το ερευνητικό αναπτύσσεται η μεθοδολογία της έρευνας. Γίνεται περιγραφή του ψηφιακού προγράμματος που χρησιμοποιείται, αναφέρονται οι στόχοι και τα αποτελέσματα της πειραματικής εφαρμογής του στο πλαίσιο του μαθήματος που αφορά τη διδασκαλία των κλασμάτων, για να διαπιστωθεί κατά πόσο οι μαθητές θα είναι σε θέση να ξεπεράσουν τις όποιες δυσκολίες συναντούν στην κατανόηση των κλασμάτων. Ο στόχος μας είναι να δείξουμε πώς οι Νέες Τεχνολογίες βοηθούν με έναν ιδιαίτερο τρόπο στην κατανόηση «δύσκολων» και αφηρημένων εννοιών όπως είναι τα κλάσματα, στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, πέραν της απλής αναπαραγωγής πληροφοριών και ως εκ τούτου στην ανάπτυξη θετικών στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά.

Ακολουθεί η βιβλιογραφία διεθνών και ελληνικών πηγών με βάση την οποία υποστηρίζεται τόσο το θεωρητικό όσο και το ερευνητικό μέρος της εργασίας μας. Η εργασία ολοκληρώνεται με το παράρτημα που παρατίθεται και περιλαμβάνει τον οδηγό συνέντευξης, τις απομαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις, τον θεματικό χάρτη και τα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο των διδακτικών παρεμβάσεων.

Εισαγωγή

Μέσα στην πορεία της ανθρώπινης ιστορίας, τα Μαθηματικά έπαιξαν πρωταγωνιστικό ρόλο για την πρόοδο και τον πολιτισμό που αναπτύχθηκε σε κάθε εποχή, καθώς «αποτελούν έναν απέραντο κόσμο αρμονίας, θαυμάτων κι εκπλήξεων» (Εξαρχάκος, 1993, σελ. 3). Συμβαδίζουν με την εξέλιξη του ανθρώπου, προσφέροντάς του πνευματική και ψυχική καλλιέργεια και βοηθώντας τον να βαδίσει τον δρόμο της ανάπτυξης. Τα Μαθηματικά είναι για όλους, γιατί είναι ανακάλυψη του πανανθρώπινου πνεύματος κι εξυπηρετούν πανανθρώπινες ανάγκες, ιδέες και αξίες (Θωμαΐδης & Καστάνης, 2002). «Για να φανταστούμε τη χρησιμότητα των μαθηματικών, αρκεί να φανταστούμε τη ζωή μας χωρίς μαθηματικά», όπως είπε ο Λάο Τσε, Κινέζος φιλόσοφος. «Τα μαθηματικά είναι η γλώσσα με την οποία ο Θεός έχει γράψει το σύμπαν», ανέφερε ο Γαλιλαίος Γαλιλέι, Ιταλός φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος και φιλόσοφος.

Αφού, λοιπόν, είναι τόσο σημαντική η συμβολή των Μαθηματικών για την πρόοδο των ανθρώπων κι αναμφισβήτητη η αξία τους, γιατί υπάρχει αυτή η φοβία κι η απέχθεια πολλές φορές των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά, όπως διερωτάται η Φιλιπποπούλου (1984). Μήπως δεν έχει δοθεί η προσοχή που χρειάζεται στην επιλογή της ύλης και στον τρόπο παρουσίασης και προσέγγισής της; Μήπως δεν έχει δοθεί στα Μαθηματικά η θέση που πρέπει να έχουν στη δομή της εκπαίδευσης;

Τα Μαθηματικά κατέχουν κυρίαρχη θέση στο αναλυτικό πρόγραμμα της Α/θμιας εκπαίδευσης. Γιατί, εκτός από τις πρακτικές τους εφαρμογές και τα μέσα που παρέχουν στον άνθρωπο, για να αποκτήσει τα απαραίτητα αγαθά της ζωής, συμβάλλουν αποφασιστικά στην πνευματική καλλιέργεια του ανθρώπου, καθώς τον βοηθούν να αντιλαμβάνεται σωστά τον κόσμο μέσα στον οποίο κινείται (Donald, 2001). Είναι ένα από τα ωραιότερα μαθήματα, καθώς συνδέονται με ανώτερες πνευματικές αξίες, που οδηγούν σε ανώτερους κόσμους, όπως η μουσική και η ποίηση. Όπως έλεγε ο Ινδός ποιητής Tagore, «τα Μαθηματικά και η μουσική είναι στενοί συγγενείς» και πρόσθετε: «Με τα Μαθηματικά και τη Μουσική η ψυχή μας αγγίζει την απόλυτη αλήθεια» (Tagore, οπ. αναφ. στο Εξαρχάκος, 1993, σελ. 29).

Στο Δημοτικό Σχολείο το παιδί έρχεται επίσημα για πρώτη φορά σε επαφή με τη μαθηματική επιστήμη. Στο Δημοτικό θα γνωρίσει τις πρώτες μαθηματικές έννοιες και κυρίως, εκεί θα καθορίσει τη στάση του απέναντι στα Μαθηματικά. Αν το παιδί στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση δε γίνει φίλος με τα Μαθηματικά και δεν εφοδιαστεί με όλες

εκείνες τις βασικές γνώσεις του μαθήματος, τότε μοιραία θα πάρει αρνητική στάση σε όλη του τη ζωή. Το μάθημα υπό αυτές τις συνθήκες γίνεται δύσκολο και αποκρουστικό (Γκότσης, 1987) .

Ο ρόλος που παίζουν τα Μαθηματικά στην επίτευξη των διαχρονικών μορφωτικών, κοινωνικών και πολιτιστικών σκοπών της εκπαίδευσης είναι πρωταγωνιστικός, επειδή:

- Ενεργοποιούν και οξύνουν τις γνωστικές λειτουργίες (αντίληψη, προσοχή, μνήμη, νόηση, αναγνώριση, φαντασία).
- Συντελούν στην ανάπτυξη της παρατηρητικότητας και βοηθούν την άσκηση της αυτοσυγκέντρωσης.
- Ασκούν την ακρίβεια, τη σαφήνεια και την ορθότητα της έκφρασης.
- Συμβάλλουν στη συναισθηματική ωρίμανση του ανθρώπου καλλιεργώντας του το αυτοσυναίσθημα, κοινωνικά συναισθήματα, την αίσθηση της αρμονίας και της τελειότητας (Εξαρχάκος, 1981).

Η προσφορά των Μαθηματικών είναι πολύτιμη για τον άνθρωπο όχι μόνο μέσα στο σχολείο, αλλά και έξω από αυτό, όταν καλείται να παίξει τους ποικίλους ρόλους του στη ζωή. Αυτό συμβαίνει, γιατί τα Μαθηματικά διευκολύνουν τις ανθρώπινες συναλλαγές και εξυπηρετούν τις κάθε είδους ανάγκες της καθημερινής ζωής. Επιπλέον, συμβάλλουν στην ανάπτυξη και εξέλιξη των άλλων επιστημών και χρησιμοποιούνται στην εξήγηση των φαινομένων της φύσης (Donald, 2001).

Στο Δημοτικό Σχολείο ειδικότερα η μαθηματική εκπαίδευση επιδιώκει, μεταξύ των πολλαπλών σκοπών και στόχων που αναφέρονται αναλυτικότερα σε επόμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, τα εξής:

- Να αναπτύξει την αναλυτική και συνθετική σκέψη του μαθητή.
- Να οικοδομήσει ο μαθητής τις βασικές μαθηματικές έννοιες, γνώσεις και διαδικασίες.
- Να αναπτύξει την ικανότητα του παιδιού να συνεργάζεται και να κάνει χρήση της νέας τεχνολογίας, για να επιλύει προβλήματα.
- Να αποκτήσει την ικανότητα να συλλέγει, να ταξινομεί και να οργανώνει δεδομένα (Driscoll, 1980).

Για να υλοποιηθούν οι στόχοι, είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη οι αρχές στις οποίες στηρίζεται η μάθηση και με τις οποίες αποκτάμε τη γνώση. Για να επιτευχθεί

η μάθηση στα μαθηματικά, είναι πρωταρχικής σημασίας να αναπτύξουν οι μαθητές θετικό συναίσθημα απέναντι στο μάθημα. Για να συμβεί, όμως, αυτό, χρειάζεται να εμπλουτιστεί το μάθημα με νέα στοιχεία που θα βρίσκονται κοντά στα ενδιαφέροντα, τις ανάγκες και τα βιώματα των παιδιών, ώστε να προωθείται η αυτενέργεια και η μαθητική πρωτοβουλία.

Όσον αφορά τις πρακτικές και τα μέσα υλοποίησης των επιδιώξεων της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, έχουν διατυπωθεί σημαντικές διαφωνίες που εντοπίζονται τόσο στο γνωστικό περιεχόμενο όσο και τη διδακτική μεθοδολογία της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Τα τελευταία χρόνια ανοίχτηκαν νέοι ορίζοντες για την μαθηματική επιστήμη γενικότερα αλλά και για τη διδασκαλία των Μαθηματικών με τη χρησιμοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, των ψηφιακών περιβαλλόντων και των νέων τεχνολογιών (Εξαρχάκος, 1981).

Η έντονη τεχνολογική αλλαγή στην καθημερινότητα από τη μια, από την άλλη, όμως, η μη εναρμόνιση αυτής της αλλαγής με το σχολείο και τις ανάγκες μαθητών και εκπαιδευτικών, έδωσε την αφορμή στους ερευνητές να εξετάσουν τη Διδακτική των Μαθηματικών υπό ένα άλλο πρίσμα. Αναζητούνται οι κατάλληλοι τρόποι, ώστε οι εκπαιδευτικοί, οι μαθητές, η σχολική κοινότητα και το μαθησιακό περιεχόμενο, που αποτελούν ξεχωριστούς παράγοντες της μάθησης, να αναπτυχθούν και να εξελιχθούν και στη συνέχεια, να γεφυρωθούν οι σχέσεις μεταξύ τους, ώστε να υπάρξει το επιθυμητό αποτέλεσμα, η μάθηση.

Στην παρούσα εργασία, μέσα από το ερευνητικό μέρος γίνεται προσπάθεια να αναδειχτεί η σημαντική προσφορά και υποστήριξη που παρέχουν οι νέες τεχνολογίες στον εκπαιδευτικό πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Μέσα στο πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Ε΄ τάξη Δημοτικού γίνεται υλοποίηση, εφαρμογή και αξιολόγηση του λογισμικού GeoGebra, ενός ψηφιακού εργαλείου που λειτουργεί υποστηρικτικά για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Το GeoGebra είναι ένα διαδραστικό πρόγραμμα που παρέχει τη δυνατότητα της άμεσης οπτικοποίησης των διάφορων μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων. Το περιβάλλον αυτό δημιουργήθηκε από τον Markus Hohenwarter το 2001, με στόχο να συνδυάσει τη γεωμετρία και την άλγεβρα με τη βιομαθητική και την ενεργητική μάθηση. Το Geogebra έχει αποτελέσει το επίκεντρο αρκετών ερευνών, καθώς μέσα από τη χρήση του τα μαθηματικά φαινόμενα και οι έννοιες συνδέονται με μια πληθώρα αναπαραστατικών μοντέλων, δίνοντας τη δυνατότητα στους μαθητές να δημιουργήσουν τα

δικά τους μαθηματικά αντικείμενα, να εργαστούν με θέματα και προβλήματα που συνδέονται με την καθημερινότητα, να παρέμβουν δημιουργικά σχηματίζοντας τα δικά τους γνωστικά σχήματα μέσα από την αυτενέργεια και την ανακαλυπτική μάθηση (Hohenwarter & Jones, 2007).

1. Βιβλιογραφική Επισκόπηση

1.1. Διδακτική Μαθηματικών

1.1.1. Ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη των Μαθηματικών

Τα Μαθηματικά είναι από τις πιο παλιές και τις πιο σημαντικές επινοήσεις του πνεύματος του ανθρώπου. Είναι ένα από τα μεγαλύτερα ανθρώπινα επιτεύγματα, το οποίο έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της σημερινής κοινωνίας. Η ανάγκη των ανθρώπων να ερμηνεύσουν τον κόσμο και ο,τιδήποτε συμβαίνει γύρω μας, οδήγησε στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης. Άρχισαν να αναπτύσσονται από τους αρχαίους προ-ελληνικούς ήδη χρόνους και συνεχίζουν να εξελίσσονται με τρομακτικά γρήγορους ρυθμούς μέχρι σήμερα (Τρούλης, 1992).

Οι αρχές τους βρίσκονται στα βάθη της προϊστορίας και πηγάζουν από την ανάγκη μέτρησης και συναλλαγής των αγαθών. Μερικοί λαοί και ορισμένα άτομα συνέβαλαν ιδιαίτερα στην ανάπτυξή τους. Η ιστορία των Μαθηματικών διακρίνει πέντε περιόδους στην εξέλιξή τους (Εξαρχάκος, 1993).

Τα προελληνικά Μαθηματικά (από τις αρχές τους μέχρι το 600 π. Χ.) περιλαμβάνουν τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων, των Βαβυλωνίων, των Σουμερίων, των Κινέζων και των Ινδών και είχαν κατεξοχήν πρακτικό χαρακτήρα. Οι Αιγύπτιοι ήταν ο πρώτος λαός που ασχολήθηκε με τη μαθηματική επιστήμη (Τουμάσης, 1994). Η μελέτη των αιγυπτιακών μαθηματικών παπύρων αποκαλύπτει ότι γνώριζαν πώς να χειρίζονται τους αριθμούς και τα γεωμετρικά σχήματα, οι σκοποί, όμως, που επιδίωκαν ήταν εντελώς πρακτικοί. Χρειάζονταν τους αριθμούς, για να μετρούν τη γη τους και να δημιουργούν τα μεγαλειώδη οικοδομήματά τους. Τα ίδια ισχύουν και για τους αρχαίους Βαβυλωνίους. Η έμφαση δόθηκε στην πρακτική αριθμητική και στις καταμετρήσεις (Wilder, 1986).

Η περίοδος από τον Θαλή, 600 π. Χ., μέχρι τον Διόφαντο, 150 μ. Χ. περίπου, είναι περίοδος των Ελληνικών Μαθηματικών (Εξαρχάκος, 1993). Η μαθηματική επιστήμη –με τη σημερινή σημασία του όρου- άρχισε να δημιουργείται κατά τους αρχαίους κλασικούς χρόνους. Ο Πλάτων, ο Αριστοτέλης, ο Πυθαγόρας, ο Ευκλείδης, ο Θαλής, ο Αρχιμήδης και άλλοι αρχαίοι φιλόσοφοι στηρίχτηκαν στον μαθηματικό τρόπο σκέψης, για να ερμηνεύσουν τις κινήσεις του ήλιου και των πλανητών και διαμόρφωσαν θαυμαστό συλλογισμό για την γενική κατάσταση των ουράνιων σωμάτων και του σύμπαντος (Basmakova, 2014). Όλοι οι ιστορικοί της επιστήμης μιλούν για το «Ελληνικό θαύμα» (Donald, 2001). Βέβαια, οι αρχαίοι Έλληνες δε δημιούργησαν τα πάντα μέσα από το μυαλό τους, αλλά επηρεάστηκαν και δανείστηκαν πολλές γνώσεις από τους Αιγυπτίους και τους άλλους πολιτισμούς της

Ανατολής, καθώς οι Έλληνες ήταν μεγάλοι έμποροι και ταξίδευαν απ' άκρη σ' άκρη σε όλο σχεδόν τον τότε γνωστό κόσμο (Sir Thomas Heath, 2001).

Στη σκέψη όλων αυτών των μεγάλων στοχαστών αναπτύχθηκαν για πρώτη φορά οι έννοιες της αφαίρεσης, της γενίκευσης, της ανάλυσης και της σύνθεσης. Αυτό που χαρακτηρίζει τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, ήταν ότι εισάγουν το στοιχείο της απόδειξης (Basmakova, 2014). Οι γεωμέτρες συνειδητοποίησαν ότι υπήρχαν κάποιες προτάσεις οι οποίες έπρεπε να διατυπωθούν ως προφανείς. Έτσι γεννήθηκε η ιδέα των αξιωμάτων. Με αυτούς τους στοιχειώδεις λογικούς κανόνες και κάποιους προσεκτικά διατυπωμένους ορισμούς, μπήκαν οι βάσεις για την επιστημονική ανάπτυξη της γεωμετρίας (Θωμάϊδης, 1990· Τουμάσης, 1994).

Ένα άλλο γνώρισμα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών ήταν ότι οι μαθηματικές ιδέες ήταν καθαρά αφηρημένες. Καμιά πρακτική εφαρμογή δε γινόταν αντικείμενο μελέτης. Οι πρακτικές εφαρμογές των μαθηματικών δεν είχαν καμιά σχέση με την ενασχόληση του στοχαστή. Μόνο κατώτεροι πνευματικά άνθρωποι μπορούσαν να ασχοληθούν με τις εφαρμογές των μαθηματικών στις καθημερινές ανάγκες της ζωής. Επίσης, κανένας μεγάλος Έλληνας μαθηματικός, εκτός του Αρχιμήδη, δεν ενδιαφέρθηκε να περιγράψει και να εξηγήσει στους μαθητές του τη διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης (Donald, 2001). Ενώ οι κανόνες της απόδειξης ήταν πολύ αυστηροί, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν ασχολούνταν με την ανάλυση της φυσικής πορείας του μυαλού κατά τη διάρκεια της απόδειξης. Αυτός είναι ο βασικός λόγος που οι μαθηματικές αποδείξεις και οι συλλογισμοί φαίνονται τόσο τεχνητοί και δυσνόητοι, κυρίως στους μαθητές (Gown, 1968).

Από τον 3^ο μ.Χ. αιώνα αρχίζει μια προοδευτική παρακμή στην εξέλιξη των Μαθηματικών και συνεχίζεται κατά τη διάρκεια της μεσαιωνικής περιόδου μέχρι τον 15^ο μ.Χ. αιώνα, όπου η πρόοδος στα Μαθηματικά ήταν σχετικά μικρή. Η περίοδος αυτή είναι περίοδος μεσαίωνα και για τη μαθηματική επιστήμη. Η λαμπρή περίοδος των Ελληνικών Μαθηματικών ανακόπτεται και τη θέση τους παίρνουν διάφοροι ανατολικοί λαοί που σημειώνουν αξιόλογες αλλά όχι πρωτότυπες κατακτήσεις στα Μαθηματικά. Η κατάκτηση της Ελλάδας από τους Ρωμαίους και η άνοδος του Χριστιανισμού κατέστρεψαν τον μεγαλειώδη ελληνικό πολιτισμό. Χιλιάδες ελληνικά βιβλία κάηκαν από τους Ρωμαίους και τους χριστιανούς, οι οποίοι θεώρησαν ότι τα ελληνικά έργα είχαν τις ρίζες τους στον παγανισμό (Εξαρχάκος, 1981). Ευτυχώς, ένα μικρό μέρος των ελληνικών έργων περισώθηκε και οι λόγιοι τα πήραν μαζί τους στην Κωνσταντινούπολη. Αυτά τα έργα μαζί με τις εργασίες κάποιων διανοούμενων στην Ινδία και την Αραβία έπαιξαν ένα σπουδαίο ρόλο στη ραγδαία ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Πράγματι, οι Ινδοί και οι Άραβες επινόησαν και

ανέπτυξαν το σημερινό αριθμητικό σύστημα, το δεκαδικό. Οι Άραβες, στην ίδια περίοδο, όχι μόνο αφομοιώνουν το ινδικό και ελληνικό πνεύμα, αλλά και το εμπλουτίζουν με δικές τους ανακαλύψεις και το μεταλαμπαδεύουν με τις κατακτήσεις τους στη Δυτική Ευρώπη. Οι Άραβες ήταν οι θεμελιωτές της σύγχρονης άλγεβρας, ενός μαθηματικού κλάδου με ανυπολόγιστη αξία (Εξαρχάκος, 1981).

Από το δεύτερο μισό του 15^{ου} και μέχρι το τέλος του 18^{ου} μ.Χ. αιώνα τα Μαθηματικά περνούν τη δική τους Αναγέννηση (Εξαρχάκος, 1993). Μεγάλη συνεισφορά προς την επιστήμη αυτή έγινε από ιδιοφυείς μαθηματικούς όπως οι Newton, Descartes, Taylor, Bernoulli, Euler, Laplace, Monger και πολλοί ακόμα. Οι επιστήμονες αυτοί εργάστηκαν με επιτυχία σε όλες σχεδόν τις τότε γνωστές περιοχές των Μαθηματικών και διέδρυναν εκπληκτικά το οικοδόμημα της μαθηματικής επιστήμης προς κάθε κατεύθυνση:

- ✓ Ο Γάλλος μαθηματικός Francois Viète (1540-1603) έβαλε τα θεμέλια της νέας Άλγεβρας.
- ✓ Ο Γάλλος φιλόσοφος και μαθηματικός Descartes (1596-1650) ανακάλυψε την Αναλυτική Γεωμετρία (Loria, 1990).
- ✓ Οι μαθηματικοί Leibnitz (1646-1716) και Newton (1642-1727) ανακάλυψαν τον απειροστικό λογισμό.
- ✓ Ο Euler (1707-1783) έδωσε στην τριγωνομετρία την οριστική της μορφή.
- ✓ Η γεωμετρία έκανε σημαντικά βήματα με τις εργασίες του Clairaut, ενώ ο μεγαλύτερος γεωμέτρης του 18^{ου} αιώνα ήταν ο Monger, που θεωρείται ο ιδρυτής της παραστατικής γεωμετρίας (Struik, 1967).

Οι τεράστιες ανακαλύψεις όλων αυτών των πρωτοπόρων μαθηματικών της περιόδου αυτής οδήγησαν τη μαθηματική επιστήμη στο αποκορύφωμά της. Γι' αυτό δεν είναι περίεργο ότι κατά το τέλος του 18^{ου} αιώνα, μερικοί από τους κορυφαίους μαθηματικούς είχαν την εντύπωση ότι το πεδίο της μαθηματικής έρευνας είχε κατά κάποιο τρόπο εξαντληθεί. Η εντύπωση αυτή διαψεύστηκε με τον πιο κατηγορηματικό τρόπο με τις τεράστιες μαθηματικές ανακαλύψεις που ακολούθησαν τους δύο επόμενους αιώνες (Εξαρχάκος, 1993). Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα αρχίζει μια νέα μεγάλη περίοδος στην ιστορία των Μαθηματικών με τις νέες ανακαλύψεις της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, της αφηρημένης Άλγεβρας, της θεωρίας των συναρτήσεων και όλων εκείνων των σπουδαίων ανακαλύψεων, οι οποίες έφεραν την εξέλιξη στη μαθηματική επιστήμη (Τουμάσης, 1994).

Κατά τον 19^ο αιώνα ο κόσμος των μαθηματικών είχε καταληφθεί από ένα είδος φρενιτιδας για την ανακάλυψη νέων περιοχών της μαθηματικής επιστήμης. Επίσης παρουσιάστηκαν σημαντικοί μαθηματικοί οι οποίοι συντέλεσαν θετικά στην ανάπτυξη των

διάφορων μαθηματικών κλάδων. Οι μαθηματικοί, όπως οι Hilbert, Laplace και Gauss, άρχισαν σιγά σιγά να κάνουν προσπάθειες για τη δημιουργία σταθερών θεμελίων, αρχικά στην ανάλυση (Χριστιανίδης, 2003). Ο Weierstrass πρότεινε ένα πρόγραμμα, το οποίο αποτέλεσε τη βάση, για να αναπτυχθεί το σύστημα των πραγματικών αριθμών. Το πρόγραμμα αυτό ονομάστηκε το 1895 από τον Klein «αριθμητικοποίηση της ανάλυσης» και πραγματοποιήθηκε προς το τέλος του αιώνα από τους Weierstrass, Dedekind, Cantor, Peano και άλλους (Boyer, 1968· Χριστιανίδης, 2003).

Κατά τον 20^ο αιώνα επεκτείνονται και τελειοποιούνται οι προηγούμενες μαθηματικές κατακτήσεις, γίνονται νέες ανακαλύψεις και δημιουργούνται νέοι κλάδοι στα Μαθηματικά. Η μεγαλύτερη ώθηση τον 20^ο αιώνα προήλθε από την ανάπτυξη και τελειοποίηση του ηλεκτρονικού υπολογιστή, με αποτέλεσμα τα Μαθηματικά να επεμβαίνουν σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Γενικά, ο 20^{ος} αιώνας μπορεί να χαρακτηριστεί ως ο αιώνας της μεγαλύτερης αφαίρεσης στα Μαθηματικά καθώς και της αξιωματικής θεμελίωσης και ενοποίησης των διάφορων μαθηματικών κλάδων. Με την εφαρμογή των αφηρημένων Μαθηματικών στην τεχνολογία, στη βιομηχανία, στην άμυνα και σε άλλους νευραλγικούς χώρους, ο 20^{ος} αιώνας μπορεί να θεωρηθεί ως η περίοδος της ανθρώπινης ιστορίας με τη μεγαλύτερη εφαρμογή των Μαθηματικών, όχι μόνο στις άλλες επιστήμες, αλλά σε όλους σχεδόν τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας (Ρουσόπουλος, 1987-1988).

Σήμερα η μαθηματική γνώση πολλαπλασιάζεται με γοργούς ρυθμούς. Υπάρχουν γύρω στους 100 βασικούς κλάδους μαθηματικών, με περίπου 3.400 υποκατηγορίες (Davis & Hersh, 1981). Τα αποτελέσματα της έρευνας σ' αυτά τα πεδία διαδίδονται μέσα από 1.500 περιοδικά που δημοσιεύονται σε 100 διαφορετικές γλώσσες, ενώ πάνω από 200.000 θεωρήματα παράγονται κάθε χρόνο από τα μέλη της μαθηματικής κοινότητας (Τουμάσης, 1994).

1.1.2. Η εκπαίδευση και οι σκοποί της

Από παιδαγωγική άποψη, εκπαίδευση είναι η κοινωνικά οργανωμένη διαδικασία που στοχεύει να συμβάλλει στην απόκτηση από τους εκπαιδευόμενους γνώσεων, ικανοτήτων, δεξιοτήτων και στη διαμόρφωση αξιών, ώστε να τους καταστήσει ικανούς να προσαρμόζονται στις συνθήκες ζωής που συναντούν, αλλά και να τις επηρεάζουν, σύμφωνα με τα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες τους (Φιλίππου & Χρίστου, 2002).

Χρέος της κάθε γενιάς θεωρείται η ενημέρωση της επόμενης σχετικά με την πολιτιστική παράδοση και την κοινωνική κατάσταση που παρέλαβε, ώστε να την

αξιοποιήσει μέσα από τις κατάλληλες συνθήκες, που θα διαμορφώσει και να την εξελίξει ακόμα περισσότερο (Βαϊνάς, 2012). Όσο πιο οργανωμένο και εξελιγμένο είναι ένα κοινωνικό σύνολο τόσο πιο μεθοδευμένα και μελετημένα γίνεται αυτή η προσπάθεια επίδρασης. Τίθενται προκαθορισμένοι στόχοι, επιλέγονται φορείς που θα συνεργαστούν για την επίτευξη αυτών των στόχων, ακολουθείται συγκεκριμένη μεθοδολογία, διατίθεται υλική υποδομή και υιοθετείται μια σειρά από δραστηριότητες που αποβλέπουν σε επιδιωκόμενο αποτέλεσμα. Όλες αυτές οι δραστηριότητες ορίζουν τους θεσμικούς φορείς της εκπαίδευσης.

Οι σκοποί της εκπαίδευσης διακρίνονται σε μεταβλητούς και διαχρονικούς (Εξαρχάκος, 1993). Οι μεταβλητοί σκοποί καθορίζονται από την πολιτική, κοινωνική και οικονομική δομή μιας συγκεκριμένης χώρας, τις ιδιαιτερότητές της, τις ανάγκες και τις ιδιαίτερες καταστάσεις που αντιμετωπίζει. Ανάλογα με την εξέλιξη της κοινωνίας και τους ιδιαίτερους στόχους και τις ανάγκες της, η εκάστοτε πολιτεία πρέπει να διαμορφώνει και να καθορίζει επακριβώς τους σκοπούς στους οποίους αποβλέπει η εκπαίδευση του λαού (Βαϊνάς, 2012). Οι σκοποί αυτοί αποβλέπουν στην οργάνωση και εξέλιξη της εκάστοτε κοινωνίας και επηρεάζουν το κοινό καλό του κοινωνικού συνόλου.

Εκτός από τους σκοπούς αυτούς της εκπαίδευσης που διαφέρουν από χώρα σε χώρα και από εποχή σε εποχή, υπάρχουν και σκοποί της εκπαίδευσης που είναι σταθεροί και αφορούν όλες τις κοινωνίες και όλες τις χρονικές περιόδους. Οι σκοποί αυτοί είναι διαχρονικοί και χαρακτηρίζονται ως μορφωτικοί, κοινωνικοί και πολιτιστικοί (Πετρουλάκη, 1981· Κελπανίδης, 2007).

α) Μορφωτικοί σκοποί

Πρωταρχικής σημασίας σκοπό της εκπαίδευσης αποτελεί η διαμόρφωση καλλιεργημένου πολίτη νοητικά, ψυχικά και σωματικά. Μέσω της πραγμάτωσης των μορφωτικών σκοπών, η εκπαίδευση αποβλέπει ώστε το άτομο:

- Να αποκτήσει ένα σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων που είναι απαραίτητες, για να ασκήσει κάποια εργασία, να επιτελεί τους κοινωνικούς του ρόλους και να προσαρμοστεί ομαλά στο κοινωνικό σύνολο.
- Να αποκτήσει συλλογιστική ικανότητα.
- Να ασκηθεί στη σαφήνεια και την ορθότητα της έκφρασης.
- Να αποκτήσει συνέπεια και υπευθυνότητα, που είναι σημάδια ψυχικής ανωτερότητας και ωριμότητας.

- Να συνειδητοποιήσει τη σημασία και την αξία της κοινωνικής δικαιοσύνης και της αλήθειας.
- Να αποκτήσει ετοιμότητα, πρωτοβουλία, αποφασιστικότητα και αυτοπειθαρχία.
- Να μπορεί να παίρνει σωστές αποφάσεις με καθαρή σκέψη και ελεύθερη βούληση.

β) Κοινωνικοί σκοποί

Βασικό σκοπό της εκπαίδευσης αποτελεί η συμβολή στην κοινωνικοποίηση του παιδιού έτσι ώστε:

- Να μάθει για τις δυνατότητες και τα όρια του εαυτού του σε συσχέτιση με τους άλλους. Να συνειδητοποιήσει ποιοι είναι οι ρόλοι που ενδέχεται να παίζει μέσα στις κοινωνικές ομάδες στις οποίες ανήκει, όπως η οικογένεια, το σχολείο, το κοινωνικό σύνολο και να συνειδητοποιήσει ότι και τα άλλα άτομα της κάθε ομάδας έχουν παρόμοιους ρόλους.
- Να συνειδητοποιήσει τα δικαιώματά του και τις υποχρεώσεις του και να μάθει να τα διεκδικεί, όταν αυτά καταστρατηγούνται.
- Να μπορεί να συμμετέχει χωρίς εμπόδια και να συμβάλλει ενεργά στις διάφορες κοινωνικές δράσεις.
- Να προσφέρει στο κοινωνικό σύνολο και να συνεργάζεται με τα άλλα μέλη της κοινωνικής ομάδας (Ματσαγγούρας, 2009).

γ) Πολιτιστικοί σκοποί

Ένας από τους βασικότερους σκοπούς της εκπαίδευσης είναι να γνωρίσουν οι νεότερες γενιές τον πολιτισμό και την κουλτούρα της πατρίδας τους (Βαϊνάς, 2012). Έχει βαρύνουσα σημασία:

- Να γίνει το άτομο γνώστης της γλώσσας του.
- Να αποκτήσει γνώση της τοπικής ιστορίας και των πολιτιστικών επιτευγμάτων των προγόνων του.
- Να αποκτήσει ενημέρωση για την καλλιτεχνικές δημιουργίες, τα λογοτεχνικά έργα, τα ήθη και τα έθιμα του τόπου του. Επιπλέον, να μυηθεί και να αναπτύξει δράση για περαιτέρω πολιτιστική δημιουργία (Κελπανίδης, 2007).

Βέβαια, αυτή η ταξινόμηση των σκοπών δεν είναι η μοναδική ούτε εξαντλούνται οι σκοποί της Εκπαίδευσης μέσα στο πλαίσιο μιας πτυχιακής εργασίας. Ωστόσο, ένα από τα αποτελεσματικότερα μέσα επίτευξης και πραγμάτωσης των σκοπών της Εκπαίδευσης είναι τα Μαθηματικά. Εκτός από τις πρακτικές εφαρμογές τους και τη βοήθεια που προσφέρουν

στον άνθρωπο, για να αποκτήσει τα απαραίτητα αγαθά της ζωής, αφυπνίζουν τις δημιουργικές δυνάμεις του ατόμου, συνεισφέρουν σημαντικά στην πνευματική του καλλιέργεια και του παρέχουν τη δυνατότητα να αποκτά γνώση και αντίληψη του κόσμου που το περιβάλλει με μια διερευνητική και αντικειμενική θεώρηση. Γι' αυτό, τα αναλυτικά προγράμματα όλων των χωρών δίνουν σημαντική θέση στα Μαθηματικά σ' όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Εξαρχάκος, 1991).

1.1.3. Η Μαθηματική Εκπαίδευση

1.1.3.1. Η έννοια της Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Από τα πρώτα ακόμα χρόνια που εμφανίστηκαν τα αρχικά στοιχεία της μαθηματικής γνώσης, δημιουργήθηκε η ανάγκη να μεταφερθεί αυτή η γνώση στις επόμενες γενιές, οι οποίες και θα συνέχιζαν την παράδοση, εμπλουτίζοντάς την με νέα επιτεύγματα. Αυτή ήταν μια φυσική ανάγκη που δημιουργήθηκε και ικανοποιήθηκε στην αρχή με δασκάλους τους παλαιότερους και μαθητές τους νεότερους, χωρίς βέβαια την ίδρυση κάποιων ειδικών θεσμών (Τουμάσης, 1994). «*Η Διδακτική είναι η επιστημονική μελέτη της διδασκαλίας*» (Γαγάτσης, 1991). Η Διδακτική των Μαθηματικών, συγκεκριμένα, ως ιδιαίτερος επιστημονικός κλάδος είναι σχετικά πρόσφατος. Οι αρχές του βρίσκονται στο τέλος της δεκαετίας του 1960 και αναδύθηκε από την ανάγκη διεπιστημονικής ανάλυσης του φαινομένου της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών στις διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης (Τρούλης, 1992).

Μαθηματική Εκπαίδευση είναι η οργανωμένη μετάδοση μαθηματικής γνώσης. Είναι η οργανωμένη προσπάθεια μιας γενιάς να μεταδώσει στη νεότερη κατάλληλο μαθηματικό υλικό, με σκοπό να τη φέρει σ' επαφή με τη θεωρία και τις πρακτικές εφαρμογές της Μαθηματικής Επιστήμης και να την κάνει ικανή για να μελετήσει και να προωθήσει την εξέλιξή της (Εξαρχάκος, 1993, σελ. 58). Η Διδακτική των Μαθηματικών έχει ως κύριο αντικείμενο τις διαδικασίες που αποσκοπούν στη μετάδοση και απόκτηση των διάφορων μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων, ιδιαίτερα σε σχολικό και πανεπιστημιακό περιβάλλον.

Η Μαθηματική Εκπαίδευση που παρέχεται στα σχολεία πρέπει, από τη μια, να είναι στενά συνδεδεμένη με τους γενικούς σκοπούς της εκπαίδευσης, όπως αυτοί έχουν καθοριστεί σε κάθε χώρα και να συμβάλλει στην επιτυχία τους. Από την άλλη, να παρακολουθεί την εξέλιξη της Μαθηματικής Επιστήμης, η οποία είναι ένας ζωντανός οργανισμός που συνεχώς εξελίσσεται. Αυτό σημαίνει ότι τα σχολικά Μαθηματικά θα πρέπει να ανταποκρίνονται στην εκάστοτε σύγχρονη πραγματικότητα, θα πρέπει να ανανεώνονται

και να εκσυγχρονίζονται σύμφωνα με τα νέα δεδομένα, τους νέους τρόπους απόδειξης και τους σύγχρονους ορισμούς και συμβολισμούς.

Όπως αναφέρει η Κολέζα (1999), απαιτούνται δύο αναγκαία στοιχεία για τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει μαθηματικά:

- α) Να είναι γνώστης της μαθηματικής επιστήμης και, συγκεκριμένα, να γνωρίζει με επάρκεια τη μαθηματική ύλη που πρόκειται να διδάξει στην τάξη στην οποία απευθύνεται.
- β) Να γνωρίζει με ποιους διδακτικούς τρόπους θα υλοποιηθεί η αποτελεσματικότερη προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης.

Μια μαθηματική έννοια ή διαδικασία που πρόκειται να διδαχτεί, έχει διπλό χαρακτήρα. Αποτελεί, από τη μια, επιστημονικό στοιχείο και, από την άλλη, μέρος της διδακτέας ύλης. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να μεριμνήσει, ώστε με τις κατάλληλες διαδικασίες και τα διδακτικά μέσα να καταφέρει ο μαθητής να προσεγγίσει την επιστημονική αυτή γνώση.

Πρόκειται για το πρόβλημα της διδακτικής μετάπλασης. Ο όρος της διδακτικής μετάπλασης αφορά τους μηχανισμούς που επιτρέπουν το πέρασμα από το επιστημονικό αντικείμενο στο εκπαιδευτικό-διδακτικό αντικείμενο. Αφορά, δηλαδή, τον μετασχηματισμό μιας επιστημονικής έννοιας σε διδακτική γνώση και δεξιότητα που πρόκειται να προσαρμοστεί στο διδακτικό πλαίσιο και να αφομοιωθεί από τους μαθητές (Κολέζα, 1999· Σάλλας, 2009).

1.1.3.2. Η εξέλιξη της Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Η εξέλιξη της Μαθηματικής επιστήμης ήταν αλματώδης, ιδιαίτερα από την Αναγέννηση μέχρι και σήμερα. Σύμφωνα με τις βιβλιογραφικές αναφορές, ωστόσο, διαπιστώνεται ότι η εξέλιξη αυτή δεν επέφερε ανάλογη αλλαγή στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Τα μεσαιωνικά χρόνια έχουμε τα μοναστηριακά σχολεία. Την εποχή αυτή αρχίζει να αναπτύσσεται ένας διπλός τύπος εκπαίδευσης. Ο πρώτος τύπος προοριζόταν για τους μαθητές που προέρχονταν από τα μεσαία κοινωνικά στρώματα. Η εκπαίδευσή τους ήταν προσανατολισμένη προς τις εφαρμογές και τις επαγγελματικές χρήσεις των μαθηματικών, ιδιαίτερα αυτές που σχετίζονταν με το εμπόριο και τη ναυσιπλοΐα. Ο δεύτερος τύπος εκπαίδευσης προοριζόταν για τα παιδιά της ανώτερης κοινωνικής τάξης και είχε σκοπό να δημιουργήσει «χριστιανούς αριστοκράτες» (Τουμάσης, 1994).

Στην αρχή της Αναγέννησης λειτουργούσαν τα Λατινικά Σχολεία (κλασικά) και το μάθημα των Μαθηματικών είχε μικρή θέση στα προγράμματα των σχολείων. Ο σκοπός της διδασκαλίας τους ήταν να εξυπηρετήσουν πρακτικές κυρίως ανάγκες. Ωστόσο, την εποχή της Αναγέννησης έχουμε τις πρώτες αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς αρχίζει να

γίνεται αυστηρή κριτική στη σχολαστική μορφή της εκπαίδευσης, η οποία βασιζόταν κυρίως στη στεία απομνημόνευση και τόνιζε τις θεωρητική πλευρά των Μαθηματικών. Με την πάροδο του χρόνου τα μαθηματικά πήραν πιο σημαντική θέση στα προγράμματα των σχολείων και έγιναν σημαντικές αλλαγές τόσο στον σκοπό όσο και στις μεθόδους διδασκαλίας τους (Εξαρχάκος, 1993).

Κατά τη διάρκεια του 16^{ου} αιώνα η ύλη των μαθηματικών που διδασκόταν στα κλασικά σχολεία περιοριζόταν μόνο στις πράξεις με αριθμούς και μάλιστα στην πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό. Η διαίρεση διδασκόταν στα Πανεπιστήμια. Κατά τον 17^ο αιώνα, η κατάσταση άρχισε να μεταβάλλεται, ιδιαίτερα στην Ιταλία, στη Γαλλία και τη Γερμανία (Εξαρχάκος, 1993). Κατά τον 18^ο αιώνα, η θέση των Μαθηματικών βελτιώνεται ακόμα πιο πολύ. Γίνονται το κυριότερο μάθημα σπουδών στη Γενική Εκπαίδευση κι ορίζεται ειδικός καθηγητής για τη διδασκαλία τους σε κάθε σχολείο.

Με την είσοδο του 19^{ου} αιώνα σήμανε και η αρχή της βιομηχανικής περιόδου για πολλές χώρες. Οι αυξημένες ανάγκες της νέας βιομηχανικής κοινωνίας δημιουργούσαν τις προϋποθέσεις για ένα νέο προσανατολισμό της εκπαίδευσης (Καζατζής, 1984). Γύρω στο 1870, άρχισε να παρουσιάζεται μια κίνηση αρχικά στη Γερμανία και στη συνέχεια στη Γαλλία, την Αγγλία, την Αμερική και σε πολλές άλλες χώρες (Θωμαΐδης, 1990). Η κίνηση αυτή είχε ως σκοπό την αλλαγή του τρόπου διδασκαλίας και τη μεταβολή της όλης αγωγής στα σχολεία της Γενικής Εκπαίδευσης. Από την εποχή αυτή η αγωγή δεν ήταν για τους λίγους, τους εκλεκτούς, αλλά κάλυπτε περισσότερους μαθητές. Στράφηκε προς το παιδί κι έγινε παιδοκεντρική από δασκαλοκεντρική που ήταν μέχρι τότε. Παράλληλα, αλλάζει και ο σκοπός διδασκαλίας των Μαθηματικών. Η διδασκαλία τους δεν αποβλέπει μόνο στις πρακτικές τους εφαρμογές αλλά και στην εκγύμναση και καλλιέργεια του πνεύματος. Τα Μαθηματικά θεωρούνται το μάθημα της καθαρής λογικής (Εξαρχάκος, 1993). Τον 19^ο αιώνα αναπτύσσεται ένα πραγματικό ενδιαφέρον για την παιδαγωγική του μαθήματος των Μαθηματικών, που περιλάμβανε προβληματισμούς γύρω από τα προγράμματα, τους σκοπούς και τις μεθόδους διδασκαλίας.

Από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα εμφανίστηκε μια ζωνρή κίνηση στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, που είχε ως στόχο την αναπροσαρμογή των προγραμμάτων της μαθηματικής παιδείας και των μεθόδων διδασκαλίας (Χατζηστεφανίδης, 1986). Οι κοινωνικές απαιτήσεις άλλαξαν και παράλληλα μεταβλήθηκαν τα προγράμματα και οι σκοποί των μαθηματικών, προκειμένου να συμβάλλουν στη μόρφωση του αυξανόμενου αριθμού μαθητών και τις μαθησιακές ανάγκες που εμφανίστηκαν. Ο βασικός σκοπός των μαθηματικών την εποχή αυτή εστιάστηκε στη διαμόρφωση ικανών και συνειδητοποιημένων

πολιτών (Τουμάσης, 1989). Επιπλέον, η ραγδαία τεχνολογική εξέλιξη, η οποία προϋπόθετε την υψηλού επιπέδου μαθηματική εκπαίδευση και έρευνα, έκανε επιτακτική ανάγκη τον εκσυγχρονισμό των σχολικών μαθηματικών.

Μετά το 1950 η μαθηματική εκπαίδευση κατακλύστηκε από μεταρρυθμίσεις και αλλαγές που συνεχίζονται μέχρι σήμερα. Στις αρχές της δεκαετίας αυτής, εμφανίστηκαν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές στην αγορά, σηματοδοτώντας έτσι τη νέα εποχή της πληροφορικής. Νέες επαγγελματικές ευκαιρίες δημιουργήθηκαν, για τις οποίες χρειαζόταν υψηλού επιπέδου μαθηματική κατάρτιση. Όλες οι αλλαγές που σημειώθηκαν την περίοδο αυτή, επιτάχυναν τη μεταρρύθμιση στη μαθηματική εκπαίδευση και την αλλαγή των σχολικών προγραμμάτων και των μεθόδων διδασκαλίας του μαθηματικού πεδίου από το 1960 μέχρι σήμερα (Τουμάσης, 1989). Οι μεταρρυθμίσεις έγιναν σε τέσσερα κύματα. Το μεγαλύτερο μέρος της μεταρρύθμισης πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια των δεκαετιών 1960 και 1970, όπου και συντελέστηκαν οι πιο καίριες μεταβολές στα μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια και την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση στις περισσότερες χώρες του κόσμου. Αποτέλεσμα αυτών των προσπαθειών ήταν να επικρατήσουν τα «νέα» ή «μοντέρνα Μαθηματικά».

Τα «μοντέρνα» Μαθηματικά μπήκαν στα σχολικά προγράμματα της Γαλλίας γύρω στο 1955 (Εξαρχάκος, 1993· Βαϊνάς, 1997). Σύμφωνα με τα προγράμματα αυτά, περιορίζεται η παραδοσιακή Ευκλείδεια Γεωμετρία. Αναμορφώνεται η Άλγεβρα και εισάγεται στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων, ποσοδείκτες, απεικονίσεις, η έννοια της πράξης σ' ένα σύνολο (Τουμάσης, 1987). Μετά το 1955 αρχίζει να προβληματίζει η σκέψη για αλλαγή των προγραμμάτων εκπαίδευσης κατά το πρότυπο της Γαλλίας. Γίνεται συνείδηση ότι είναι ανάγκη να γίνει ριζική αλλαγή της ύλης, των τρόπων και των μεθόδων διδασκαλίας των Μαθηματικών. Οι τεχνολογικές και επιστημονικές εξελίξεις παγκοσμίως δημιουργούν τη ζωνή επιθυμία των κυβερνήσεων ανά τον κόσμο να διαθέσουν σημαντικά χρηματικά ποσά για τη γρήγορη αναμόρφωση των σχολικών προγραμμάτων (Τουμάσης, 1987).

Στο συνέδριο του Ο.Ο.Σ.Α. που έγινε στη Γαλλία το 1959, κορυφαίοι καθηγητές εισηγούνται την κατάργηση όλων των παραδοσιακών Μαθηματικών. Από το τέλος του 1958 και τις αρχές του 1959, τα κράτη μέλη του Οργανισμού Ευρωπαϊκής Οικονομικής Συνεργασίας (Ο.Ε.Ε.Σ.),¹ του γνωστού μας Ο.Ο.Σ.Α., αποφάσισαν να ασχοληθούν σοβαρά

¹Ο.Ε.Ε.Σ.: Οργανισμός Ευρωπαϊκής Οικονομικής Συνεργασίας. Ένα από τα καθήκοντά του είναι να συντονίζει τις προσπάθειες όλων των κρατών-μελών του στην Εκπαίδευση και την επιστημονική έρευνα. Το 1961 μετονομάστηκε σε Οργανισμό Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (Ο.Ε.Σ.Α.), γνωστός σε μας ως Ο.Ο.Σ.Α.

με τη αναμόρφωση των Μαθηματικών που διδάσκονται στη Γενική Εκπαίδευση (Βαϊνάς, 1997). Ο οργανισμός αυτός χρηματοδότησε και προγραμματίισε ειδικά συνέδρια σε διάφορες χώρες, που είχαν ως κύριο αντικείμενο τον προγραμματισμό της Μαθηματικής Εκπαίδευσης στα σχολεία της Μέσης κυρίως Εκπαίδευσης (Leon, 1985· Goodson, 2001).

Οι αλλαγές που σημειώθηκαν στα σχολικά δεδομένα των μαθηματικών καθορίζονταν κάθε φορά από δύο βασικούς παράγοντες. Από τη μια, ήταν οι εξελίξεις της μαθηματικής επιστήμης και από την άλλη, η ανάγκη για κοινωνική αλλαγή σύμφωνα με την ανάπτυξη της οικονομίας και της τεχνολογίας. Παρόλο που οι βασικές αρχές των μεταρρυθμίσεων αυτών ήταν διεθνώς κοινές, οι αλλαγές όμως στη μαθηματική εκπαίδευση δεν έγιναν ταυτόχρονα σ' όλες τις χώρες ούτε χαρακτηρίζονταν από τα ίδια γνωρίσματα (Χατζηστεφανίδης, 1986). Κάθε χώρα προχώρησε στις μεταρρυθμίσεις αυτές σύμφωνα με τις δικές της ιδιαιτερότητες και κάτω από την επίδραση των δικών της οικονομικών, κοινωνικών, ιδεολογικών και πολιτιστικών παραγόντων.

1.1.3.3. Η Μαθηματική Εκπαίδευση στην Ελλάδα

Μέχρι τη δεκαετία του 1950, τα Μαθηματικά που διδάσκονταν τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο ήταν πολύ χαμηλού επιπέδου (στοιχειώδη). Η ύλη ήταν αναχρονιστική και δεν είχε αλλάξει για πολλά χρόνια (Εξαρχάκος, 1981). Ανάμεσα στα Μαθηματικά που διδάσκονταν στη Μέση Εκπαίδευση κι σε αυτά που διδάσκονταν στην Ανώτατη υπήρχε μεγάλο κενό. Τα διδακτικά βιβλία των Μαθηματικών ήταν απαρχαιωμένα, πολλά από αυτά ήταν κακογραμμένα και εντελώς ακατάλληλα.

Μέχρι το πρώτο μισό της δεκαετίας του 1960 υπήρχε το εξατάξιο Γυμνάσιο (Γυμνάσιο με έξι τάξεις). Στις δύο πρώτες τάξεις του Γυμνασίου διδάσκονταν η Πρακτική Αριθμητική και Πρακτική Γεωμετρία. Στην Τρίτη τάξη άρχιζε η διδασκαλία του αλγεβρικού λογισμού και της θεωρητικής Γεωμετρίας, που διδάσκονταν και στις υπόλοιπες τάξεις του Γυμνασίου. Στην τελευταία τάξη διδάσκονταν η Στερεομετρία και η Τριγωνομετρία (Εξαρχάκος, 1981). Στο αναλυτικό πρόγραμμα του εξατάξιου Γυμνασίου, τα Μαθηματικά ήταν κατακερματισμένα και διαχωρισμένα σε κλάδους, καθώς η Αριθμητική, η Άλγεβρα, η Γεωμετρία, η Τριγωνομετρία διδάσκονταν ως εντελώς ξεχωριστά μαθήματα (Χατζηστεφανίδης, 1986).

Μετά το συνέδριο της Γαλλίας το 1959 υπό την αιγίδα του Ο.Ο.Σ.Α., ορίστηκε μια επιτροπή για την αναπροσαρμογή των σχολικών προγραμμάτων των Μαθηματικών, που ονομάστηκε «Επιτροπή Πειραματικής Μελέτης και Διδασκαλίας των Μαθηματικών στη Μέση Εκπαίδευση» και με την οποία αρχίζει η εισαγωγή της μεταρρύθμισης των

«Μοντέρνων Μαθηματικών» (Θωμαΐδης, 1990). Το έργο της επιτροπής ήταν να μελετήσει τα πορίσματα του συνεδρίου, να αναμορφώσει τη μαθηματική ύλη της Μέσης Εκπαίδευσης και να γράψει νέα βιβλία Μαθηματικών. Η επιτροπή με βάση τα πορίσματα του Ο.Ο.Σ.Α. έγραψε τρία βιβλία πειραματικής διδασκαλίας των Μαθηματικών, ένα για κάθε μια από τις τρεις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, τα οποία άρχισαν να διδάσκονται πειραματικά από το 1963 (Θωμαΐδης & Καστάνης, 2002).

Το 1964 άρχισαν να διδάσκονται τα «μοντέρνα μαθηματικά» στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Εξαρχάκος, 1993). Τη χρονιά αυτή έγινε μια γενική προσπάθεια για εκπαιδευτική μεταρρύθμιση που περιελάμβανε τα ακόλουθα:

- Το εξατάξιο Γυμνάσιο χωρίστηκε σε τριτάξιο Γυμνάσιο και τριτάξιο Λύκειο.
- Έγινε εισαγωγή νέων μαθηματικών ενοτήτων στα σχολικά προγράμματα με σκοπό την αναμόρφωση της μαθηματικής ύλης.
- Γράφτηκαν νέα διδακτικά βιβλία.
- Αυξήθηκαν οι ώρες για την εβδομαδιαία διδασκαλία των Μαθηματικών.
- Μειώθηκε σημαντικά το χάσμα που υπήρχε ανάμεσα στη Μέση και την Ανώτατη Εκπαίδευση ως προς τη μαθηματική ύλη.

Όλη αυτή η προσπάθεια για εκπαιδευτική μεταρρύθμιση σταμάτησε το 1967, οπότε έγιναν βήματα προς τα πίσω με την επαναφορά του εξατάξιου Γυμνασίου και τη μείωση των ωρών εβδομαδιαίας διδασκαλίας των Μαθηματικών (Θωμαΐδης, 1990· Μαραγκουδάκης, 1994).

Από το 1974 και μετά έγιναν προσπάθειες για την αναμόρφωση των Αναλυτικών Προγραμμάτων. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του Δημοτικού Σχολείου του 1977, η συνένωση της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας έγινε σε όλες τις τάξεις και το ίδιο ίσχυσε και για το Αναλυτικό πρόγραμμα του 1980 για το τριτάξιο Γυμνάσιο (Κασιμάτη, 1994). Από το 1978 έγινε εισαγωγή στα σχολικά προγράμματα νέας μαθηματικής ύλης (Χοντολίδου, 1987). Από το σχολικό έτος 1984-1985 άρχισε η λειτουργία των Ενιαίων Πολυκλαδικών Λυκείων (Ε.Π.Λ.). Στην ύλη των μαθηματικών που διδάσκεται στα σχολεία αυτά, μπήκαν και νέες μαθηματικές ενότητες, όπως Οικονομικά Μαθηματικά και Πληροφορική (Καζαντζής, 1984). Στο επίπεδο του Δημοτικού άρχισαν να γίνονται σοβαρές προσπάθειες ανανέωσης της διδασκαλίας των Μαθηματικών με την ανανέωση του αναλυτικού προγράμματος τους, την έκδοση βοηθητικών βιβλίων για τον μαθητή και τον δάσκαλο, την ανανέωση της μεθόδου διδασκαλίας που είχε ως επίκεντρο την ερευνητική συμμετοχή του μαθητή και την επιμόρφωση του διδακτικού προσωπικού μέσω τοπικών συνεδρίων (Εξαρχάκος, 1998· Εξαρχάκος, 2019).

1.1.3.4. Η θέση της Διδακτικής Μαθηματικών στην Ελλάδα

«Στη χώρα μας δεν μπορεί να γίνει λόγος προς το παρόν για διαμόρφωση ειδικού επιστημονικού αντικειμένου με τον χαρακτηρισμό Διδακτική των Μαθηματικών» (Τρούλης, 1992, σελ. 31). Μόλις το 1985 υπήρξε καθυστερημένη αναγνώριση της αξίας των Επιστημών της Αγωγής και η εισαγωγή τους στα πανεπιστήμια της χώρας. Μέχρι τότε επικρατούσε στείρος ακαδημαϊσμός που χαρακτήριζε όλες τις βαθμίδες του εκπαιδευτικού μας συστήματος κι εμπόδιζε την ανάπτυξη παιδαγωγικής έρευνας γενικότερα και ειδικότερα στη Διδακτική Μαθηματικών. Όπως προκύπτει από την βιβλιογραφική επισκόπηση, διακρίνονται δύο περίοδοι ανάπτυξης της Διδακτικής των Μαθηματικών ως ιδιαίτερου επιστημονικού πεδίου στη χώρα μας, η περίοδος από το 1878 μέχρι το 1982 και η μετά το 1982 περίοδος (Βαϊνάς, 1997).

Από το 1878 που ιδρύθηκαν τα τριτάξια Διδασκαλεία μέχρι το 1982 που καταργήθηκαν οι Παιδαγωγικές Ακαδημίες και ιδρύθηκαν τα Παιδαγωγικά Τμήματα (Ν. 1268/82), η διδακτική και μαθηματική μόρφωση των δασκάλων χαρακτηρίζεται από το πνεύμα του φερμαλισμού και της τυποποίησης που χαρακτήριζαν ολόκληρο το εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας (Τρούλης, 1992). Την περίοδο αυτή τα βασικά χαρακτηριστικά στο χώρο της διδασκαλίας των Μαθηματικών αποτελούσαν:

- η ελλιπής μαθηματική και παιδαγωγική μόρφωση των δασκάλων, στοιχείο που αύξανε την επαγγελματική τους ανασφάλεια,
- τα δύσκαμπτα και αναχρονιστικά αναλυτικά προγράμματα,
- η δασκαλοκεντρική μέθοδος διδασκαλίας, όπου δέσποζε η παθητική και μηχανιστική μάθηση,
- τα διδακτικά βιβλία που είχαν τη μορφή συνταγολογίου για δασκάλους και μαθητές, τα οποία δεν άφηναν περιθώρια πρωτοβουλιών στους χρήστες τους, αλλά απαιτούσαν την πιστή εφαρμογή στην πράξη.

Μετά τη δεκαετία του 1950, κυκλοφόρησαν για τους δασκάλους τα εγχειρίδια Ειδικής Διδακτικής που αντικατέστησαν τους «Οδηγούς Διδασκαλίας» των προηγούμενων ετών. Περιελάμβαναν πληροφορίες και μεθοδολογικές οδηγίες για τη διεξαγωγή της διδασκαλίας διαφόρων μαθημάτων. Μέσα στα εγχειρίδια αυτά υπήρχαν 10 έως 30 σελίδες που αφορούσαν τη «Διδακτική των Μαθηματικών» και αναφέρονταν συμπυκνωμένα στην έννοια, την ιστορία, το σκοπό, τη διδακτέα ύλη, τις μεθοδολογικές αρχές και την πορεία του μαθήματος (Εξαρχάκος, 2019).

Από το 1982 και μετά έγιναν σημαντικές εκσυγχρονιστικές προσπάθειες του εκπαιδευτικού μας συστήματος τόσο στο επίπεδο βασικής μόρφωσης των δασκάλων όσο και στο θεσμικό επίπεδο της λειτουργίας του δημοτικού σχολείου. Ιδρύθηκαν τα Παιδαγωγικά Τμήματα και εντάχθηκαν στα Πανεπιστήμια της χώρας. Τα Παιδαγωγικά Τμήματα έδωσαν μεγάλη σημασία τόσο στην ακαδημαϊκή μαθηματική κατάρτιση του υποψήφιου δασκάλου όσο και στη διδακτική κατάρτισή του. Μέσω της εκπαίδευσης που παρείχαν, αποσκοπούσαν στην πολυδιάστατη και διεπιστημονική ανάλυση της παιδαγωγικής πράξης, την οποία καλείται να οργανώσει ο εκπαιδευτικός (Ματθαίου, 2019).

Παράλληλα, άρχισαν να εμφανίζονται κάποιες εργασίες που φανέρωναν ότι αυξάνεται το ενδιαφέρον για ερευνητική προσπάθεια στον χώρο αυτό. Σήμερα η Διδακτική Μαθηματικών είναι ένα πεδίο που αναπτύσσεται διαρκώς. Έχει αρχίσει να επηρεάζει τα αναλυτικά προγράμματα, τη μέθοδο διδασκαλίας, τα μέσα, την αξιολόγηση και τη μόρφωση των εκπαιδευτικών.

1.1.4 Γενικοί σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών

Ο απώτερος σκοπός της μαθηματικής παιδείας είναι να λειτουργήσουν τα μαθηματικά ως ένα χρήσιμο εργαλείο και μέσο που θα βοηθήσει το άτομο να κατανοήσει την πραγματικότητα και την κοινωνία και να συμβάλλει στην εξέλιξή της με στόχο έναν πιο ανθρώπινο κόσμο (Κισκύρα Χ. & Κισκύρα Ν., 1987). Επομένως, οι σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών, που αναφέρονται στα σχολικά προγράμματα γενικότερα και ειδικότερα στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, πρέπει να εκφράζουν τη συνισταμένη πολλών παραγόντων:

- κοινωνικών,
- πολιτικών,
- τεχνολογικών,
- εκπαιδευτικών.

Μέσα από τη σχετική βιβλιογραφία διακρίνονται τρεις ευρείες κατηγορίες γενικών σκοπών διδασκαλίας των Μαθηματικών.

α) Πρακτικοί σκοποί

Οι σκοποί αυτοί αναφέρονται στην έμπρακτη εφαρμογή που μπορεί να έχουν οι δεξιότητες και οι γνώσεις που αποκτά το άτομο μέσα από τα μαθηματικά για τη ζωή του και κατ' επέκταση για την κοινωνία (Φουντόπουλος, 1987). Τέτοιοι σκοποί είναι:

- Να κατανοήσουν τις βασικές αλγεβρικές πράξεις και να τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.
- Να μάθουν και να χρησιμοποιούν τις διαδικασίες που αφορούν την ταξινόμηση, τη διάταξη, την αντιστοίχιση και τη μέτρηση.
- Να προσεγγίσουν βασικές μαθηματικές έννοιες, όπως είναι η ισότητα, η αξία του αριθμού, ο χρόνος, ο χώρος, τα σχήματα, η επιφάνεια, ο όγκος και να τις χρησιμοποιούν καταλλήλως.
- Να αποκτήσουν υπολογιστικές ικανότητες.
- Να εξασκηθούν στην εκτίμηση του αποτελέσματος και στον προσεγγιστικό υπολογισμό μιας πράξης.
- Να ασκηθούν στη μέτρηση μεγεθών.
- Να ερμηνεύουν τις γραφικές παραστάσεις και να αναπαριστούν γραφικά τα διάφορα μαθηματικά μεγέθη.
- Να πάρουν τις βάσεις και να προετοιμαστούν, προκειμένου να παρακολουθήσουν τα Μαθηματικά και τα σχετικά μ' αυτά μαθήματα στις παραπάνω βαθμίδες.

β) Μορφωτικοί σκοποί

Οι σκοποί αυτοί σχετίζονται με τη διανοητική καλλιέργεια του ανθρώπου και συμβάλλουν στον σχηματισμό και την ανάπτυξη κάποιων γενικών χαρακτηριστικών γνωρισμάτων (Πολυχρονόπουλος, 1986· Κισκύρα Χ. & Κισκύρα Ν., 1987). Τέτοιοι σκοποί είναι:

- Να διαμορφώσουν την κρίση και τη λογική τους σκέψη.
- Να αναγνωρίζουν τις λογικές σχέσεις μεταξύ ανεξάρτητων γεγονότων.
- Να αποκτήσουν την ικανότητα για αφαίρεση και γενίκευση.
- Να αποκτήσουν διανοητικές στάσεις θετικές για τη ζωή του ανθρώπου, όπως πειθαρχία, ακρίβεια, σαφήνεια.

γ) Πολιτιστικοί σκοποί

Οι σκοποί αυτοί βοηθούν το άτομο να εκτιμήσει και να αναγνωρίσει την αξία των Μαθηματικών ως πολιτιστικού αγαθού (Φουντόπουλος, 1987). Τέτοιοι σκοποί είναι:

- Να μπορούν να εκτιμούν την ομορφιά και την αρμονία στα γεωμετρικά σχήματα της φύσης.
- Να αναζητούν την τελειότητα.
- Να αναγνωρίζουν τη δύναμη των Μαθηματικών και τον ρόλο που αυτά έχουν παίζει στην κοινωνική εξέλιξη.

- Να αναπτύξουν την αίσθηση της συμμετρίας, της αρμονίας, του ωραίου (Καπετάνου-Μακρινού, 1985).

Βέβαια, οι απόψεις οι οποίες πλαισιώνουν και οδηγούν στη διαμόρφωση αυτών των σκοπών στα αναλυτικά προγράμματα μπορεί να είναι διαφορετικές ανάμεσα στις διάφορες χώρες και εξαρτώνται κάθε φορά από την κουλτούρα, το κοινωνικό υπόβαθρο, το πολιτικό και το οικονομικό πλαίσιο, καθώς τα Μαθηματικά είναι μια πνευματική δραστηριότητα, που επηρεάζεται από κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες. Διαμορφώνονται σύμφωνα με τις υλικές και πνευματικές ανάγκες της κάθε εποχής και εξελίσσονται με βάση τις κοινωνικές συνθήκες.

1.1.5. Δομικά στοιχεία της Διδακτικής Μαθηματικών

Για να πετύχει τους σκοπούς της η διδακτική διαδικασία, πρέπει να έχει οργανωθεί σωστά και μελετημένα. Οι παράγοντες που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για τη σωστή οργάνωσή της είναι οι παρακάτω:

- ο μαθητής,
- ο δάσκαλος,
- αναλυτικά προγράμματα- σχολικά εγχειρίδια,
- το διδακτικό κλίμα.

Έχει μεγάλη σημασία να διερευνάται πριν από κάθε διδακτική πράξη το ποιον θα διδάξουμε, ποιος θα διδάξει, τι θα διδάξουμε, πότε θα γίνει αυτό και με ποιο τρόπο (Ματσαγγούρας, 2006).

α) Ο μαθητής

Κατά την οργάνωση της μαθηματικής εκπαίδευσης ο μαθητής είναι ο σπουδαιότερος παράγοντας που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη. Ο μαθητής δεν είναι ένα άψυχο υλικό, ένας απαθής δέκτης της προσφερόμενης ύλης. Είναι αυτόνομη προσωπικότητα με σκέψεις, προβληματισμούς, ενδιαφέροντα, δυνατότητες, ικανότητες και συγκεκριμένες προηγούμενες γνώσεις. Πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η ψυχοπνευματική και σωματική ανάπτυξη του μαθητή και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά αυτής της ανάπτυξης (Ματσαγγούρας, 2009). Όσοι ασχολούνται με την οργάνωση της εκπαίδευσης οφείλουν να έχουν μελετήσει τα πορίσματα της Γενετικής Ψυχολογίας, της Παιδαγωγικής, της Ψυχολογίας παιδιού και εφήβου. Πρέπει να γνωρίζουν πώς οικοδομεί τη γνώση ο μέσος μαθητής σε κάθε ηλικία, ποια είναι η αντιληπτική του ικανότητα, πώς και πότε μπορεί να

οδηγηθεί στην κατανόηση αφηρημένων εννοιών και πώς αναπτύσσεται η κριτική του σκέψη (Γαγάτσης, 1991· Ματσαγγούρας, 2006).

Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί πως όσο πιστά κι αν ακολουθήσουμε τις επιταγές της Παιδαγωγικής και της Ψυχολογίας, η ίδια ύλη και ο ίδιος τρόπος προσφοράς της δεν μπορούν να έχουν τα ίδια αποτελέσματα για όλους ανεξαρτήτως τους μαθητές. Κι αυτό γιατί κάθε μαθητής είναι μια ξεχωριστή προσωπικότητα, ένας διαφορετικός κόσμος. Οι ατομικές διαφορές των μαθητών, τόσο από άποψη δυνατοτήτων και ενδιαφερόντων, όσο και από άποψη ψυχοπαιδαγωγικής και σωματικής ανάπτυξης, πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη. Ο μαθητής βρίσκεται στο επίκεντρο της διδακτικής διαδικασίας και αυτό που ουσιαστικά ενδιαφέρει είναι να επιτευχθεί ως τελικό προϊόν η μάθηση.

β) Ο δάσκαλος

Ο δάσκαλος είναι ένας αποφασιστικός παράγοντας στη διαδικασία της μάθησης. Δεν είναι μόνο ένας επαγγελματίας που έχει την υποχρέωση να μεταφέρει στον μαθητή τη διδακτική ύλη του αναλυτικού προγράμματος και να μεταφέρει γνώση. Είναι ένας λειτουργός που έχει την ευθύνη να βοηθήσει τους μαθητές να διαμορφώσουν την προσωπικότητά τους και να χαράξουν τη δική τους πορεία ως υπεύθυνα και ελεύθερα άτομα. Αυτός ο πολύπλευρος ρόλος απαιτεί από τον δάσκαλο να έχει επιστημονική κατάρτιση, ενημέρωση πάνω σε θέματα ψυχολογίας, παιδαγωγικής και διδακτικής και να διαθέτει κάποια ιδιαίτερα γνωρίσματα, έμφυτα και επίκτητα, που θα τον βοηθούν να ανταποκρίνεται αποτελεσματικά στο έργο του (Ωραιόπουλος, 1987).

Ο δάσκαλος πρέπει να κατέχει την ύλη που θα διδάξει, ώστε να περιμένει και να έχει προετοιμαστεί να απαντήσει σε κάθε δυνατή απορία των μαθητών του. Ακόμα, να ξέρει τι ακριβώς γνωρίζουν οι μαθητές από προηγούμενες χρονιές και τι προβλέπεται να μάθουν στις επόμενες. Πρέπει να παρακολουθεί ανελλιπώς την εξέλιξη της επιστήμης του και να ενημερώνεται για τις νέες ανακαλύψεις και τις εφαρμογές της. Να είναι σε θέση όχι μόνο να κατανοεί τα διάφορα επιτεύγματα της επιστήμης που διδάσκει, αλλά να μπορεί και να τα προσαρμόζει στη σχολική πραγματικότητα (Ματσαγγούρας, 1999).

Η γνώση της ψυχολογίας και της συμπεριφοράς του παιδιού είναι ένα απαραίτητο βήμα στη διδακτική διαδικασία, καθώς δεν απευθύνεται μόνο στη νόηση του παιδιού. Αυτό που μετράει περισσότερο είναι η καλλιέργεια της προσωπικότητας του μαθητή. Οι επιθυμίες, τα ενδιαφέροντα, οι ανάγκες, τα προβλήματα, οι αντιδράσεις πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη μέσα και έξω από την αίθουσα διδασκαλίας (Ματσαγγούρας, 2009). Το επόμενο βήμα είναι να βρει ο εκπαιδευτικός τους κατάλληλους και σωστούς

χειρισμούς, για να επιδράσει στη συμπεριφορά αυτή, έτσι ώστε να αξιοποιήσει κάθε σημείο της και να οδηγήσει το παιδί στην κατάκτηση της γνώσης με τρόπο ευχάριστο κι ενδιαφέροντα (Ματσαγγούρας, 2011).

Ο ενημερωμένος παιδαγωγικά και διδακτικά δάσκαλος οργανώνει σωστά τη διδασκαλία του, βρίσκει τρόπους ομαλής και φυσικής εξέλιξης κάθε νέου μαθήματος και δημιουργεί στην αίθουσα διδασκαλίας κλίμα άνετης εργασίας, ευχάριστης αναζήτησης, δημιουργικής συνεργασίας, ελεύθερης έκφρασης και αμοιβαίας εμπιστοσύνης. Παράλληλα, η προσωπικότητα του δασκάλου, η συμπεριφορά του, η στάση του μέσα κι έξω από την τάξη και οι σχέσεις του με τους μαθητές του είναι εξίσου καθοριστικοί παράγοντες για την επιτυχία της όλης διδακτικής διαδικασίας (Γαγάτσης, 1991).

Ειδικότερα, όσον αφορά τα μαθηματικά, ο δάσκαλος μπορεί να εφαρμόσει τις αρχές διδασκαλίας-μάθησης δίνοντας προσοχή στις παρακάτω δραστηριότητες:

- Ο δάσκαλος ακούει προσεκτικά τι έχουν να πουν οι μαθητές για τις έννοιες των μαθηματικών και προγραμματίζει με βάση αυτά που ήδη γνωρίζουν. Όταν πρόκειται να διδαχθεί ένα θέμα στα μαθηματικά, οι δάσκαλοι οφείλουν να ενδιαφέρονται για τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών.
- Ο δάσκαλος βοηθά τους μαθητές να συσχετίζουν τις μαθηματικές έννοιες και ιδέες καθώς και τη διαδικαστική γνώση με την εννοιολογική κατανόηση. Η σύνδεση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών.
- Ο δάσκαλος ενθαρρύνει τους μαθητές να επικοινωνούν μεταξύ τους και να ανταλλάσσουν ιδέες για τη λύση μαθηματικών προβλημάτων (Φιλίππου & Χρίστου, 2002).

γ) Αναλυτικά Προγράμματα- Σχολικά εγχειρίδια

Τα Αναλυτικά Προγράμματα καθορίζουν τους γενικούς σκοπούς διδασκαλίας των μαθημάτων, τους ειδικούς σκοπούς σε κάθε τάξη και κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης και περιέχουν την επιστημονική ύλη, η οποία κρίνεται κατάλληλη και απαραίτητη για να επιτευχθούν αυτοί οι σκοποί (Χατζηγεωργίου, 2004). Η σύνταξη των αναλυτικών προγραμμάτων είναι μια πολύπλοκη διαδικασία που απαιτεί μακρόπνοο σχεδιασμό και έρευνα. Είναι στενά συνδεδεμένη με τα προβλήματα, τις ανάγκες και τις προοπτικές της συγκεκριμένης κοινωνίας και επομένως πρέπει να ακολουθεί τις εξελίξεις της.

Η επιλογή της κατάλληλης ύλης είναι ένα από τα βασικότερα και δυσκολότερα θέματα της οργανωτικής διαδικασίας της εκπαίδευσης, καθώς η διδακτέα ύλη είναι το μέσον

με το οποίο θα φτάσουμε στους σκοπούς. Κατά την επιλογή της διδακτέας ύλης από τους συντάκτες των αναλυτικών προγραμμάτων πρέπει να μελετηθούν όλοι εκείνοι οι παράγοντες που επηρεάζουν τη διδακτική διαδικασία (Φλουρής, 1983). Ειδικότερα πρέπει να μελετηθούν:

- οι γενικοί σκοποί της εκπαίδευσης,
- οι δυνατότητες, οι ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών,
- ο ρόλος των Μαθηματικών στην παιδευτική διαδικασία,
- η εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης και τα επιτεύγματά της,
- οι δυνατότητες εφαρμογής των Μαθηματικών στις απαιτήσεις της σημερινής ζωής,
- η διατήρηση της συνέχειας της μαθηματικής ύλης, όχι μόνο μέσα στην ίδια βαθμίδα, αλλά και από βαθμίδα σε βαθμίδα,
- η βοήθεια που προσφέρουν τα μαθηματικά στη διδασκαλία άλλων μαθημάτων.

Μια από τις σημαντικότερες παραμέτρους των αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών είναι τα σχολικά εγχειρίδια. *«Το διδακτικό βιβλίο μεταποιεί τις κωδικοποιημένες προθέσεις του Αναλυτικού Προγράμματος σε συγκεκριμένες δραστηριότητες τόσο για τον δάσκαλο όσο και για τον μαθητή μέσω των οποίων θα κατακτηθεί η μαθηματική γνώση»* (Τρούλης, 1992, σελ. 93-94). Γίνεται έτσι ένα εργαλείο με το οποίο ο δάσκαλος υλοποιεί τους στόχους του ΑΠ και ο μαθητής ανακαλύπτει και κατανοεί αυτούς τους στόχους. Τα σχολικά εγχειρίδια παρουσιάζουν την ύλη που θα διδαχθεί, οργανώνουν τις εργασίες και τον τρόπο προσέγγισης του εκπαιδευτικού υλικού και προτείνουν ιδέες και δραστηριότητες για την εμπλοκή των μαθητών στο μάθημα.

Η συγγραφή ενός καλού διδακτικού βιβλίου κινείται γύρω από δύο άξονες. Ο ένας είναι το αναλυτικό πρόγραμμα με το οποίο πρέπει να συμμορφωθεί. Ο άλλος είναι ο μαθητής για τον οποίο προορίζεται το βιβλίο. Η νοητική, αντιληπτική, κριτική και αφαιρετική ικανότητα της ηλικίας του μαθητή, καθώς και οι προηγούμενες γνώσεις του, τα ενδιαφέροντά του και οι ανάγκες του πρέπει να είναι σημεία αναφοράς για τους συγγραφείς (Λυκούδης, 1986).

Ειδικότερα το βιβλίο των Μαθηματικών που είναι τις περισσότερες φορές το μοναδικό μέσο διδασκαλίας τους και η μόνη πηγή αναφοράς του μαθητή, για να είναι χρήσιμος καθοδηγητής για τον δάσκαλο και υποστηρικτικό εργαλείο του μαθητή, πρέπει να έχει τα παρακάτω απαραίτητα γνωρίσματα (Κολέζα, 2017):

- Να είναι επιστημονικά άρτιο. Οι διάφορες έννοιες να δίνονται με απλό τρόπο, με σαφήνεια και έχοντας προσαρμοστεί στις ικανότητες των παιδιών.

- Να είναι παιδαγωγικά σωστό και προσεγμένο, ώστε να εφαρμόζεται η τήρηση των βασικών προϋποθέσεων και των γενικών αρχών της Παιδαγωγικής και Διδακτικής επιστήμης.
- Να είναι γραμμένο απλά και με αμεσότητα, με έκφραση βατή και κατανοητή από τους μαθητές.
- Η παρουσίαση της ύλης να ακολουθεί μια αυστηρή σειρά. Η διδακτέα ύλη να ακολουθεί μια ιεράρχηση και κάθε διδακτική ενότητα να είναι συνέχεια της προηγούμενης της.
- Να γίνεται σωστή χρήση των μαθηματικών συμβόλων.
- Οι διάφορες έννοιες να παρουσιάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να διαδέχεται η μια την άλλη.
- Σε ό,τι διδάσκεται να δίνεται η κατάλληλη εξήγηση.
- Να δίνει ερεθίσματα για προβληματισμό και ερεθίσματα.
- Η εμφάνιση του βιβλίου να είναι καλαίσθητη, ώστε να ξεκουράζει και να προσελκύει το ενδιαφέρον των μαθητών.

Τα σχολικά εγχειρίδια είναι ένα βοηθητικό μέσο και όχι το άπαν της διδασκαλίας. Κατευθύνουν τους εκπαιδευτικούς σχετικά με το τι θέμα θα διδάξουν, με ποια σειρά θα το παρουσιάσουν και πόσο χρόνο θα διαθέσουν γι' αυτό. Όμως οι τελικές επιλογές σχετικά με τη διδασκαλία είναι στην ευχέρεια του κάθε διδάσκοντα. Δηλαδή, ένα σχολικό εγχειρίδιο είναι μεν από τα βασικότερα μέσα της εκπαιδευτικής διαδικασίας, αλλά δεν αντικαθιστά την προσωπική ευθύνη και συνεισφορά του εκπαιδευτικού. Του δίνει απλά τη δυνατότητα να οργανώσει αποτελεσματικότερα τη διδασκαλία του (Κολέζα, 2017).

δ) Διδακτικό κλίμα

Η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν είναι μόνο μια γνωστική δραστηριότητα αλλά σε ένα μεγάλο βαθμό μια ψυχοσυναισθηματική δραστηριότητα. Ο δάσκαλος πρέπει να φροντίζει να δημιουργεί μια ατμόσφαιρα ευχάριστη, απαλλαγμένη από άγχος και ένταση για να διευκολυνθεί η επικοινωνία. Ένα περιβάλλον χωρίς εντάσεις και άγχος είναι ωφέλιμο και για τον μαθητή και για τον δάσκαλο, καθώς διευκολύνει την αμοιβαία αλληλεπίδρασή τους (Ρέλλος, 2007).

Σύμφωνα με τον Κόκκοτα (2009), το πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας είναι ευρύτερο από τους μαθητές και τον δάσκαλο. Στο περιβάλλον αυτό υπάρχουν και λειτουργούν όλα εκείνα τα στοιχεία που συνδιαμορφώνουν τη διδακτική πράξη όπως: γλώσσα, μέθοδοι, αξίες, πληροφορίες, η στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα, οι

γνώσεις και οι δεξιότητες που έχουν αποκτήσει οι μαθητές, οι γνώσεις του δασκάλου, η άποψή του για το γνωστικό αντικείμενο, ο τρόπος διδασκαλίας και αξιολόγησης, η άποψή του για τη μάθηση και τον δικό του ρόλο σ' αυτή.

Ο τρόπος που βιώνει ο μαθητής το ψυχολογικό κλίμα της τάξης του, εξαρτάται από τον τρόπο που εντάσσεται στη σχολική ομάδα και από τις σχέσεις που αναπτύσσει με τον δάσκαλο, τους συμμαθητές του και το διδασκόμενο αντικείμενο. Όταν ο μαθητής νιώθει ασφάλεια και υπάρχει φιλικό και θετικό κλίμα μέσα στην τάξη, βιώνει θετικές εμπειρίες και αυτό ενισχύει την αυτοπεποίθησή του και δημιουργεί θετική στάση απέναντι στη μαθησιακή πράξη (Τριλιανός, 1993· Τσιπλητάρης, 2011). Αντίθετα, όταν έχει αρνητικές εμπειρίες από τη σχολική εργασία, σχηματίζει αρνητική στάση τόσο απέναντι στον εαυτό του όσο και το μάθημα των Μαθηματικών.

Η ατμόσφαιρα πρέπει να είναι ευχάριστη, άνετη και να εξασφαλίζει στον μαθητή ελευθερία και πολλές ευκαιρίες για επιτυχία. Πρέπει, δηλαδή, να αισθάνεται το παιδί στην τάξη ψυχική άνεση, πνευματική ελευθερία και ασφάλεια. Όπως αναφέρει ο Κόκκοτας (2005), σε μια ζωντανή αίθουσα διδασκαλίας, όπου ο μαθητής εκθέτει τις απόψεις του και εκφράζει και τις πιο αφελείς σκέψεις του, η διαδικασία αυτοέκθεσης του μαθητή μπορεί να προκαλέσει αποτελέσματα αντίθετα από τα αναμενόμενα, αν συμβεί σε ένα περιβάλλον μη φιλικό. Αντίθετα, η μαθησιακή αλλαγή επιτυγχάνεται μέσα σε κλίμα ενθάρρυνσης, όπου ο μαθητής στοχάζεται ελεύθερα, χωρίς τον φόβο να χαρακτηριστούν όσα λέει λανθασμένα ή δίχως νόημα και ουσία (Κόκκοτας, 2005).

Για να επιτευχθεί το θετικό διδακτικό κλίμα, δεν είναι αρκετό ο δάσκαλος να έχει μόνο ικανότητα στα Μαθηματικά, αλλά να έχει μια καλή γνώση της ψυχολογίας μάθησης. Τα στοιχεία που βοηθούν στη δημιουργία ενός καλού κλίματος είναι τα παρακάτω:

- Να υπάρχει αυξημένη ενεργητική αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητή- δασκάλου.
- Να καλλιεργείται από τον δάσκαλο ατμόσφαιρα για ελεύθερη έκφραση.
- Να εκδηλώνεται ενδιαφέρον για τις ανάγκες των μαθητών. Οι μαθητές δε θέλουν δασκάλους απρόσωπους. Νιώθουν καλύτερα όταν φροντίζουν γι' αυτούς και ενδιαφέρονται για τη μάθηση και την επίδοσή τους.
- Να προσαρμόζονται οι μαθηματικές έννοιες στο επίπεδο των μαθητών και να λαμβάνονται υπόψη οι προηγούμενες γνώσεις τους, ώστε να είναι κατανοητές και να μη δημιουργείται ένας φαύλος κύκλος αρνητισμού και αποτυχίας.
- Να χρησιμοποιούνται συγκεκριμένα μοντέλα και παραδείγματα για την κατανόηση αφηρημένων καταστάσεων. Οι μαθητές βρίσκονται στον δικό τους κόσμο. Λόγω της εγωκεντρικής συμπεριφοράς και των διανοητικών εμποδίων που προκαλεί το στάδιο

ανάπτυξης στο οποίο βρίσκονται, πρέπει να βοηθηθούν με συγκεκριμένα μοντέλα και αναπαραστάσεις, για να προσαρμόσουν τα νέα γνωστικά στοιχεία στα παλιά (Τσιπλητάρης, 2011).

Είναι πολλοί οι παράγοντες που επιδρούν στο να δημιουργηθούν θετικές εμπειρίες ως προς τη μάθηση των μαθηματικών. Αρκετοί μαθητές αντιμετωπίζουν με αντιπάθεια και αποστροφή το μάθημα αυτό από πολύ νωρίς, εξαιτίας κακών χειρισμών κάποιων δασκάλων και αρνητικού σχολικού κλίματος. Ο δάσκαλος πρέπει να λαμβάνει υπόψη του όλους εκείνους τους παράγοντες, με στόχο, αφενός, να βελτιστοποιήσει τα μαθησιακά αποτελέσματα για τους μαθητές του και, αφετέρου, να δημιουργήσει μια θετική στάση και αγάπη απέναντι στα μαθηματικά (Γαγάτσης, 1991).

1.1.6. Θεωρίες μάθησης των Μαθηματικών

Ένα από τα σημαντικότερα θέματα της ψυχολογίας των Μαθηματικών είναι να διερευνήσει τους τρόπους μάθησης των ανθρώπων και με ποιο τρόπο σκέπτονται στα Μαθηματικά. Επειδή ασχολούνται με μια διανοητική δραστηριότητα, οι ψυχολόγοι προσπαθούν να κατανοήσουν πώς σκέπτονται οι άνθρωποι όταν έρχονται αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα ή με ποιο τρόπο επιτυγχάνεται η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Μέσα στον περασμένο αιώνα, ξεκίνησε μια πληθώρα από θεωρίες για το πώς μαθαίνει ο άνθρωπος και γενικότερα μια συστηματική μελέτη και διερεύνηση των στάσεων κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Θεωρίες έχουν διατυπωθεί από την αρχαιότητα ακόμα και από τότε συνεχίζεται η προσπάθεια να ερμηνευτεί το φαινόμενο της μάθησης από κοινωνική, βιολογική και ψυχολογική άποψη. Οι σημαντικότερες θεωρίες που σχετίζονται με τη Διδακτική των Μαθηματικών είναι οι εξής:

1) Συμπεριφορικές θεωρίες μάθησης:

Η Συνδετική ή μιχεβιοριστική θεωρία

Η θεωρία του μιχεβιορισμού αντιλαμβάνεται τον οργανισμό ως «άγραφο χαρτί» και υποστηρίζει τη θέση ότι η μάθηση και η απόκτηση γνώσης προκύπτει ως αποτέλεσμα της αντίδρασης του ατόμου στα ερεθίσματα που δέχεται από το περιβάλλον του. Κύριος εκπρόσωπός της είναι ο Thorndike (1874-1949). Σύμφωνα με τον Thorndike η συμπεριφορά αποτελείται από ερεθίσματα (E) ή γεγονότα εξωτερικά και αντιδράσεις (A) του ατόμου στα εξωτερικά αυτά γεγονότα. Όταν μια αντίδραση λαμβάνει χώρα ως απάντηση σε ένα ερέθισμα και ακολουθείται από μια ανταμοιβή, τότε αρχίζει να σχηματίζεται ένας δεσμός ή συνειρμός ανάμεσα στο ερέθισμα και την αντίδραση (Βοσνιάδου, 2002). Όσο πιο συχνά ένα

τέτοιο ζεύγος E-A ανταμείβεται, τόσο ισχυρότερος γίνεται ο δεσμός (Thorndike, 1922). Ως εκ τούτου η θεωρία αυτή ονομάζεται και συνδετική. Η θεωρία αυτή περιγράφεται με βάση τις αρχές και τους νόμους που ακολουθούν:

1. **Αρχή της πρακτικής και της εξάσκησης:** Η τεχνική αυτή θα βοηθούσε να αποκτήσει κανείς δεξιότητα να εκτελεί με ευχέρεια και άνεση αριθμητικές πράξεις, για να επιτύχει καλύτερες επιδόσεις. Η πρακτική και η εξάσκηση ως τεχνική κατείχε και συνεχίζει να κατέχει μια σημαντική θέση στη διδακτική των μαθηματικών μέχρι και σήμερα.
2. **Νόμος του αποτελέσματος,** που αποτελεί ουσιαστικά προάγγελο αυτού που σήμερα ονομάζεται «**αρχές της ενίσχυσης**». Όταν επιβραβεύονται και ανταμείβονται οι απαντήσεις που δίνει κάποιος, αυτό λειτουργεί ενισχυτικά και ακολουθούν συνήθως ως αντιδράσεις στο συγκεκριμένο ερέθισμα, ενώ οι απαντήσεις που δεν ενισχύονται, χάνουν με τον καιρό την ισχύ τους.
3. **Αρχή της δοκιμής και πλάνης:** Αυτή είναι η βασική μορφή μάθησης κατά τον Thorndike, σύμφωνα με την οποία όσο αυξάνονται οι δοκιμές τόσο μειώνεται ο χρόνος, για να φτάσει κανείς στη μάθηση. Το συμπέρασμα που προέκυψε από τα πειράματα που έγιναν, είναι ότι η μάθηση είναι σταδιακή και επιτυγχάνεται με την πάροδο του χρόνου (Κοτοπούλης, 2009).

Η κριτική που ασκήθηκε στη θεωρία αυτή εστιάζεται στο γεγονός ότι το άτομο δέχεται παθητικά τα ερεθίσματα από το γύρω περιβάλλον του, στο οποίο αντιδρά με κάποιο τρόπο. Οι μιχεβιοριστές (Watson, Skinner, Pavlov) θεωρούν ότι το μυαλό του μαθητή είναι άγραφο χαρτί, όπου μπορεί να γίνει εγγραφή της γνώσης από τον δάσκαλο. Τονίζεται η εξάσκηση, η ενίσχυση της σωστής απάντησης και η αξιολόγηση που ακολουθεί, γίνεται πάνω σε προβληματικές καταστάσεις των οποίων η πορεία είναι προκαθορισμένη και ο μαθητής χωρίς να σκέφτεται κινείται πάνω σε αυτή (Κολέζα, 2000).

Έτσι, η συγκεκριμένη μέθοδος οδηγεί τον μαθητή στη μηχανική μάθηση, χωρίς να αντιλαμβάνεται τι κάνει ουσιαστικά. Ένα άλλο κύριο μειονέκτημά της είναι ότι ο μαθητής περιορίζεται σε απλές μαθησιακές καταστάσεις και δεν οδηγείται σε σύνθετες μορφές μάθησης. Η μιχεβιοριστική προσέγγιση έχει χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία των μαθηματικών για πολλά χρόνια. Σήμερα γίνεται απ' όλους παραδεκτό πως η θεωρία αυτή εμποδίζει τους μαθητές να αναπτύξουν ανώτερη μαθηματική σκέψη. Επομένως, η διδασκαλία των Μαθηματικών δε θα πρέπει να στηρίζεται μόνο σε αυτή τη θεωρία μάθησης.

2) Γνωστικές θεωρίες μάθησης

Κατά τα τέλη της δεκαετίας του '50, αρχίζει η αμφισβήτηση των συμπεριφορικών θεωριών μάθησης, καθώς προκύπτουν νέα επιστημονικά πορίσματα της Γνωστικής Ψυχολογίας και εμφανίζονται οι γνωστικές θεωρίες μάθησης, όπως διαμορφώνονται από τις εργασίες μεγάλων παιδαγωγών (Κολιάδης, 1997). Σύμφωνα με τις γνωστικές θεωρίες, η μάθηση επέρχεται με την τροποποίηση των γνωστικών σχημάτων που ο άνθρωπος έχει δημιουργήσει μέσα από τα βιώματα και τις εμπειρίες του. Με τη διαδικασία της μάθησης δεν αλλάζει μόνο η συμπεριφορά αλλά, κυρίως, η σκέψη του ανθρώπου (Σολομωνίδου, 2001).

Η θεωρία της επεξεργασίας των πληροφοριών

Η μάθηση, σύμφωνα με τη γνωστική ψυχολογία, είναι μια διαδικασία που συμβαίνει εσωτερικά στον κάθε μαθητή και έχει ως αποτέλεσμα την τροποποίηση της συμπεριφοράς του (Κοτοπούλης, 2009). Θεωρείται ζήτημα προσωπικό και σχετίζεται με τις προηγούμενες γνώσεις, τις εμπειρίες και την ιδιοσυγκρασία του κάθε παιδιού. Διδασκαλία είναι οι ενέργειες εκείνες που πραγματώνονται στον εξωτερικό κόσμο του μαθητή, από τον δάσκαλο και έχουν βασικό στόχο να επιφέρουν τη μάθηση. Οι γνωστικές θεωρίες εστιάζονται στη φυσιολογία του εγκεφάλου και πρεσβεύουν ότι υπάρχει αναλογική σχέση ανάμεσα στον τρόπο που λειτουργεί ο εγκέφαλος και στον τρόπο που λειτουργεί ένας υπολογιστής.

Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη θεωρία της επεξεργασίας των πληροφοριών η ανθρώπινη συμπεριφορά αποτελεί το προϊόν από την επεξεργασία των στοιχείων, τα οποία προκύπτουν από το εσωτερικό ή το εξωτερικό περιβάλλον. Ο εγκέφαλος δουλεύει σαν ένα πολύπλοκο ηλεκτρονικό υπολογιστή, στον οποίο εισέρχονται δεδομένα και πληροφορίες από το περιβάλλον, πραγματοποιείται η επεξεργασία τους από το σύστημα και παράγονται τα αποτελέσματα που φανερώνουν ότι η μάθηση πραγματοποιήθηκε (Κόμης, 2004).

Σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία, ο εγκέφαλος περιέχει μια σειρά από διαφορετικής χωρητικότητας μνήμες, στις οποίες παραμένει η πληροφορία, μέχρι να ολοκληρωθεί η επεξεργασία της. Το ερέθισμα εισέρχεται από το περιβάλλον μέσω του νευρικού συστήματος. Γίνεται η πρώτη κωδικοποίηση της πληροφορίας και η εγγραφή της στη βραχυπρόθεσμη μνήμη, όπου και αποθηκεύεται προσωρινά (Βοσνιάδου, 1998). Με επαναληπτική εξάσκηση όμως διατηρείται περισσότερο χρόνο. Η εξάσκηση αυτή και η εσωτερική επεξεργασία που λαμβάνει χώρα, οδηγεί στην περαιτέρω κωδικοποίηση της πληροφορίας στη μακροπρόθεσμη μνήμη. Από εκεί μπορεί να την επαναποκτήσει όταν τη χρειαστεί (Φλουρής, 1984). Ο εκπαιδευτικός οφείλει να υποστηρίζει την πρόσληψη των πληροφοριών, οι οποίες θα εισέλθουν στη βραχυπρόθεσμη μνήμη και να οδηγηθούν στη συνέχεια μέσα από αλληλένδετες επεξεργασίες στη μακροπρόθεσμη μνήμη (Κολέζα, 2000).

Στο πλαίσιο της θεωρίας αυτής, η ύπαρξη της μνήμης είναι πολύ σημαντική για την οργάνωση και την αποθήκευση των πληροφοριών. Αφού επεξεργαστεί η πληροφορία ενώ βρίσκεται στη βραχυπρόθεσμη μνήμη, γίνεται η κωδικοποίηση και ταξινόμησή της και εναποθηκεύεται στη μακροπρόθεσμη μνήμη. Η βραχυπρόθεσμη μνήμη, όμως, δεν μπορεί να επεξεργαστεί πολλές πληροφορίες σε μια δεδομένη στιγμή. Η επανάληψη και ο αυτοματισμός έχουν ιδιαίτερη σημασία σε αυτό το σημείο. Με την επανάληψη είναι δυνατό να μείνει η παλιά πληροφορία πιο πολύ χρόνο στη βραχυπρόθεσμη μνήμη. Όταν μια διαδικασία εκτελείται άμεσα μέσω της συνεχούς επανάληψης, χωρίς, δηλαδή, να απαιτείται πολλή σκέψη, τότε προκύπτει μεγαλύτερο λειτουργικό κενό στη βραχυπρόθεσμη μνήμη για πιο απαιτητικές νοητικά ενέργειες (Κόμης, 2004).

Ο ρόλος της εξάσκησης και επανάληψης και ως εκ τούτου του αυτοματισμού που απορρέει από αυτές, είναι αναμφίβολα σημαντικός για τη μάθηση των μαθηματικών. Υπάρχει, ωστόσο, ο κίνδυνος ο αυτοματισμός να οδηγήσει σε στεία και μηχανική μάθηση, καθώς τα παιδιά εκτελούν ενέργειες μηχανικά, χωρίς να κατανοούν την ουσία και το νόημα της κάθε ενέργειας (Καρούση & Ντζιαχρήστος, 2000). Αντίθετα, είναι πρωταρχικής σημασίας να καταλαβαίνουν τις διάφορες μαθηματικές διαδικασίες και έννοιες καθώς και τις λογικές συσχετίσεις που υπάρχουν μεταξύ τους, ώστε να μπορούν εύκολα να τις αποθηκεύουν στη μνήμη τους. Επίσης, η σωστή ταξινόμηση των στοιχείων στο πεδίο της μνήμης συνεισφέρει άμεσα στην επιτυχή έκβασή τους στα Μαθηματικά. Η εξάσκηση και η πρακτική, ως τεχνικές μάθησης, επιτυγχάνουν, όταν εξυπηρετούν συγκεκριμένες ανάγκες και υποβοηθούν τους ευρύτερους σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών (Χρονάκη, 2004).

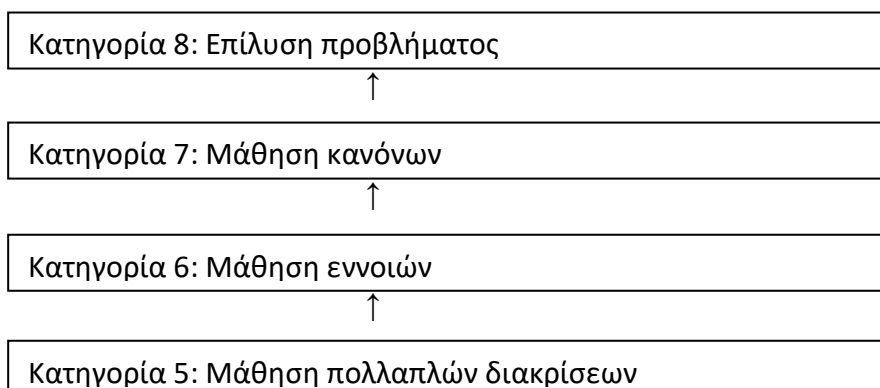
Η επισωρευτική θεωρία μάθησης ή ιεραρχιών μάθησης

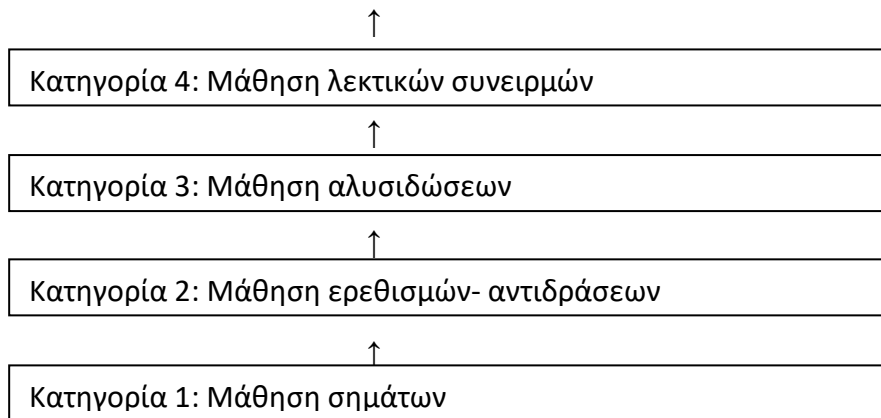
Η επισωρευτική θεωρία μάθησης ή ιεραρχιών μάθησης, κύριος εκφραστής της οποίας υπήρξε ο Robert Gagne (1970), αναγνωρίζει ότι η διδασκαλία των μαθηματικών ακολουθεί μια ιεραρχία, μια πορεία που ξεκινά από τα απλούστερα και καταλήγει στα δυσκολότερα. Βασίζεται στην αρχή ότι οι σύνθετες μαθηματικές δραστηριότητες μπορούν να απλοποιηθούν. Η εκμάθηση μιας έννοιας προϋποθέτει την ύπαρξη βασικών γνώσεων, να έχουν κατακτηθεί ή αφομοιωθεί όλες οι νοητικές δεξιότητες και συμπεριφορές που προηγούνται. Η μάθηση λειτουργεί επισωρευτικά, δηλαδή η νέα γνώση βασίζεται στην εκμάθηση της προηγούμενης και η ίδια γνώση αποτελεί τη βάση για την απόκτηση της επόμενης. Η καινούρια γνώση, δηλαδή, χτίζεται πάνω στην προηγούμενη. Σύμφωνα με τη

θεωρία αυτή, οι πιο απλές μαθηματικές έννοιες γίνονται τα δομικά στοιχεία των πιο πολύπλοκων (Gagne, 1965).

Αξίζει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι το πόσο γρήγορα και με ποιον τρόπο μαθαίνει κάποιος, διαφέρει από τον έναν στον άλλον. Κάποια άτομα μπορεί να κατανοούν τα πιο σύνθετα αντικείμενα, προσπερνώντας τα απλά και χωρίς να ακολουθούν τα ενδιάμεσα βήματα. Αυτό συμβαίνει όταν το κίνητρο για μάθηση είναι πολύ ισχυρό ή όταν το αντικείμενο μάθησης είναι ιδιαίτερα σημαντικό για το άτομο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, κατά τη διάρκεια κατάκτησης του στόχου, το άτομο ανακαλύπτει έμμεσα όλες τις προαπαιτούμενες δεξιότητες. Ως εκ τούτου αποδεικνύεται ότι το φαινόμενο της μάθησης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτό οι ατομικές διαφορές και τα στοιχεία του χαρακτήρα του κάθε ατόμου (Κολιάδης, 1996).

Η τεχνική μάθησης που ανέπτυξε ο Gagne και ονομάζεται «ανάλυση θέματος», αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτελεσματική, καθώς η μάθηση προχωράει μέσω μικρών βημάτων, με αποτέλεσμα να παρεμποδίζει τη δημιουργία κενών στον μαθητή (Τουμάσης, 1994). Το βασικό ερώτημα, πάνω στο οποίο στηρίζεται η μέθοδος αυτή είναι: «Τι πρέπει να γνωρίζει κάθε φορά ο μαθητής, για να φτάσει στον στόχο του;». Οι ιεραρχίες μάθησης, όπου βασίζεται η επισωρευτική θεωρία, μπορούν να αποδειχτούν χρησιμότερα εργαλεία για τον δάσκαλο των μαθηματικών, καθώς τον βοηθούν να οργανώσει τη διδακτική του προσέγγιση σε συνάρτηση με τις ιδιαιτερότητες και την ιδιοσυγκρασία του κάθε μαθητή, προκειμένου να τον οδηγήσει στην κατανόηση ακόμα και των πιο δύσκολων μαθηματικών εννοιών. Γι' αυτό ο Gagne πρότεινε μια ιεραρχία οκτώ διαφορετικών τύπων μάθησης:





(Τουμάσης, 1994: 128)

3) Θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης

Σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές, η μάθηση δεν είναι μια παθητική διαδικασία συσσώρευσης της γνώσης, που μεταδίδεται από τον έναν στον άλλον. Αντίθετα, έχει ενεργητική ταυτότητα και προϋποθέτει την οικοδόμηση της γνώσης εσωτερικά, εποικοδομητικά και δημιουργικά (Σολομωνίδου, 2006).

A) Γνωστικός εποικοδομισμός

Ο Piaget (1967) και ο Bruner (1966) θεμελιώνουν με το έργο τους τη θεωρία του γνωστικού εποικοδομισμού. Η μάθηση χάνει τον παθητικό της χαρακτήρα και μετατρέπεται σε ενεργητική διαδικασία. Οι μαθητές στηρίζονται στα γνωστικά σχήματα που διαθέτουν και οικοδομούν τη γνώση μέσα από την τροποποίηση των παλαιότερων σχημάτων και την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον.

Η αναπτυξιακή θεωρία του Piaget

Η θεωρία του Ελβετού γενετιστή Jean Piaget ανέτρεψε τις θεωρήσεις που ίσχυαν μέχρι τις αρχές του 20^{ου} αιώνα και αντιμετώπιζαν τα παιδιά ως μικρογραφία των μεγάλων ως προς τον τρόπο που μαθαίνουν και σκέφτονται. Ο Πιαζέ διερεύνησε τα λάθη των παιδιών, μέσα από ένα τεστ ευφυΐας που μοίρασε σε μαθητές του Παρισιού και διαπίστωσε ότι είχαν κοινά χαρακτηριστικά ανάλογα με την ηλικία στην οποία βρίσκονταν και ταυτόχρονα διέφεραν από τα λάθη που έκαναν τα παιδιά διαφορετικών ηλικιών (Κοτοπούλης, 2009).

Ο Piaget περιέγραψε την πορεία γνωστικής ανάπτυξης των παιδιών μέσα από τέσσερα στάδια. Τα στάδια εμφανίζονται σε μια σειρά διαδοχής (ιεραρχία) που παραμένει αναλλοίωτη. Η σειρά εμφάνισης των νοητικών σταδίων είναι σταθερή. Ωστόσο, το πέρασμα από το ένα στο άλλο δεν ακολουθεί σταθερή χρονολόγηση. Η συμβολή του κοινωνικού

περιβάλλοντος και η κοινωνικοποίηση του ατόμου που επέρχεται από αυτό, μπορεί να επιταχύνει τη νοητική εξέλιξη του ατόμου (Πιαζέ, 1986).

Η πορεία προς τη μάθηση περνάει μέσα από όλα τα στάδια (Λαφατζή, 2005). Σύμφωνα με τη θεωρία του Piaget, κάθε μάθηση, για να πραγματοποιηθεί, πρέπει πρώτα να αφομοιωθεί μέσα στο εσωτερικό του παιδιού. Το άτομο θα πρέπει, δηλαδή, να μεταβάλλει μια καινούρια εμπειρία με κατάλληλο τρόπο, ώστε να ταιριάζει στο μοντέλο του για τον κόσμο και να μπορέσει να την απορροφήσει (Κολιάδης, 1996). Μια άλλη πολύ σημαντική νοητική λειτουργία της θεωρίας του Piaget είναι η συμμόρφωση. Πρόκειται για τη λειτουργία κατά την οποία τροποποιούνται τα υπάρχοντα σχήματα του ατόμου, ώστε να συμπεριλάβουν και τις νέες εμπειρίες. Νέες εμπειρίες, για τις οποίες το άτομο δε διαθέτει νοητικές δομές, θα απορριφθούν, διότι αν δεν προηγηθεί η συμμόρφωση, η τροποποίηση δηλαδή της υπάρχουσας νοητικής δομής, δεν μπορεί να υπάρξει μάθηση. Χωρίς τη συμμόρφωση και την αφομοίωση δεν υπάρχει προσαρμογή του ατόμου προς το περιβάλλον του (Piaget & Inhelder, 1958).

Η κινητήρια δύναμη για νοητική ανάπτυξη είναι η εσωτερική τάση του ατόμου να δημιουργεί μια σχέση αρμονική με το περιβάλλον του. Το άτομο αποζητά την εξισορρόπηση, την ιδανική δηλαδή προσαρμογή. Αυτή η εσωτερική τάση του ατόμου το οδηγεί στην αμοιβαία αλληλεπίδραση με το περιβάλλον και στο να οργανώνει τις εμπειρίες του κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτυγχάνει την ιδανική ισορροπία. Η θεωρία του Piaget εξαίρει την ενεργητικότητα του ατόμου. Η μάθηση δε μεταδίδεται, αλλά οικοδομείται, κατασκευάζεται από τον ίδιο τον μαθητή (Λαφατζή, 2005). Ο ρόλος του δασκάλου είναι να προκαλέσει αυτές τις ενέργειες και τους μηχανισμούς που είναι απαραίτητοι για τη μάθηση. Επομένως, ο δάσκαλος είναι ο διαμεσολαβητής, αυτός που διευκολύνει τις διεργασίες μάθησης (Piaget, 1979).

Θεωρία της Ανακάλυψης

Βασικός εκφραστής της θεωρίας αυτής υπήρξε ο Bruner. Είναι από αυτούς που επηρεάστηκαν μεταγενέστερα από την αναπτυξιακή θεωρία του Piaget και η δική του εργασία επηρέασε άμεσα τη διδασκαλία των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια (Τουμάσης, 1994). Ο Bruner πίστευε ότι ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να βοηθάει τους μαθητές του να ανακαλύπτουν μόνοι τους τη γνώση. Βέβαια, υπάρχουν ποικίλοι τρόποι και μέθοδοι ανακάλυψης της γνώσης, όπως η Σωκρατική μέθοδος, η κατασκευή και επίλυση προβληματικών καταστάσεων που σχετίζονται άμεσα με τις εμπειρίες του παιδιού και μπορεί να κατανοήσει μέσω αυτών μαθηματικές έννοιες και κανόνες. Ο κάθε δάσκαλος

μπορεί να χρησιμοποιήσει τον δικό του τρόπο και τη δική του προσέγγιση, ώστε να ενεργοποιήσει τον μαθητή στη διαδικασία της ανακάλυψης (Κολέζα, 2000).

Ο Bruner, όπως και ο Piaget, επέμεινε πολύ στον ρόλο της ενεργητικότητας του μαθητή. Ο μαθητής δεν είναι ένας παθητικός ακροατής, στον οποίο ο δάσκαλος μεταλαμπαδεύει τη γνώση. Η μάθηση των μαθηματικών απαιτεί ενεργητική συμμετοχή, πειραματισμό, εξερεύνηση, ανακάλυψη. Η ανακάλυψη αυτή, μαζί με τη μάθηση που επιτυγχάνεται, λειτουργεί η ίδια ως εσωτερική ανταμοιβή και ωθεί σε περαιτέρω πειραματισμό και ανακατασκευή της γνώσης. Βέβαια, η ανακάλυψη της γνώσης από τον ίδιο τον μαθητή δεν είναι μια εύκολη διαδικασία. Παρουσιάζει δυσκολίες, απαιτεί πολύ χρόνο και ιδιαίτερες ικανότητες. Έγκειται, λοιπόν, στον ρόλο του δασκάλου να ενεργοποιήσει κατάλληλα τον μαθητή και να διευκολύνει τη διαδικασία, ώστε να ξεπεραστούν οι πρακτικές δυσκολίες και να οδηγηθεί αυτός στην ανάπτυξη της σκέψης. Βασικό στοιχείο της θεωρίας του Bruner αποτελεί η ανάπτυξη και καλλιέργεια της διαισθητικής σκέψης. Επιτρέπει μεγάλα άλματα, ελευθερία στην κίνηση και χρήση της σύντομης οδού. Καταλήγει σε συμπεράσματα που θα ελεγχθούν αργότερα με αναλυτικότερα μέσα (Bruner, 1960).

Ο Bruner πίστευε ότι η ουσιαστική μάθηση εξαρτάται από τη βαθιά κατανόηση της δομής ενός θέματος. Όσο πιο βασική είναι η ιδέα που κατάλαβε ο μαθητής και όσο πιο πολύ και σε βάθος κατανόησε τη δομή του φαινομένου, τόσο πιο αποτελεσματικά θα μπορέσει να εφαρμόσει τη νέα γνώση σε νέα προβλήματα. Κατά τον Bruner, η διαδικασία της μάθησης πρέπει να ξεκινάει από το ίδιο το πρόβλημα. Στην προσπάθειά του να το κατακτήσει, θα ανακαλύπτει σιγά σιγά αυτό που του χρειάζεται, όλες τις προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες (Bruner, 1966). Τόνισε στο έργο του την αξία της πραξιακής μάθησης (enactive learning) μέσω της αυτενέργειας, της ανακαλυπτικής ή ευρετικής μάθησης (discovery learning), καθώς και της εικονιστικής αναπαράστασης των διδασκόμενων γνωστικών αντικειμένων με τη χρήση εποπτικών μέσων (Λαφατζή, 2005).

Επιπλέον, μπορούν οι μαθητές να κατανοήσουν οποιοδήποτε θέμα, όσο δύσκολο κι αν είναι, εάν ο εκπαιδευτικός προσαρμόσει με τον κατάλληλο τρόπο τη διδασκαλία του στο στάδιο νοητικής ανάπτυξης του παιδιού. Η δυσκολία έγκειται στη σωστή προσέγγιση και στον κατάλληλο τρόπο για την παρουσίασή του. Τίποτα δεν είναι δυσνόητο, αρκεί να βρεθεί η ανάλογη γλώσσα, για να παρουσιαστεί. Μια άμεση συνέπεια της άποψης αυτής είναι η έννοια του σπειροειδούς προγράμματος για την ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, οι έννοιες εισάγονται από

πολύ νωρίς, αφού προσαρμοστούν στο διανοητικό επίπεδο του μαθητή. Επαναλαμβάνονται συνέχεια στις μεγαλύτερες τάξεις, αλλά κάθε φορά σ' ένα ανώτερο στάδιο, με περισσότερα ποσοτικά και ποιοτικά νέα στοιχεία. Αυτή η μέθοδος παρουσίασης του μαθηματικού περιεχομένου εφαρμόζεται ακόμη και σήμερα (Ματσαγγούρας, 1999).

B) Κοινωνικός εποικοδομισμός ή κονστρουκτιβισμός

Σήμερα αποτελεί τη σημαντικότερη διάσταση του εποικοδομισμού. Ένας από τους βασικότερους εκπροσώπους είναι ο Vygotsky (1978, 1993). Σύμφωνα με τον Vygotsky, η μάθηση τελείται μέσα σε ένα ιστορικό, κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο, με το οποίο βρίσκεται σε άμεση σχέση. Επιπρόσθετα, η γλώσσα αποτελεί το πολιτισμικό εργαλείο και μέσο που προωθεί τη διαμόρφωση της ταυτότητας του μαθητή (Ράπτης & Ράπτη, 2004). Κατ' αυτόν οι λέξεις δε χρησιμοποιούνται μόνο για να εκφράσουν τη σκέψη, αλλά αυτές είναι τα μέσα με τα οποία πραγματοποιείται η σκέψη. Χωρίς τις λέξεις δε θα ήταν δυνατό να μεταδώσουμε σε κάποιον μια έννοια (Κόκκοτας, 2009).

Παράλληλα, ο Vygotsky ήταν ο εισηγητής του όρου της «ζώνης της επικείμενης ανάπτυξης» του ατόμου. Με τον όρο «ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης» υποδήλωνε τη δυνατότητα υπέρβασης του επιπέδου γνωστικής ανάπτυξης στο οποίο βρίσκεται ο μαθητής μια καθορισμένη χρονική στιγμή, προκειμένου να φτάσει στο επίπεδο νοητικής ανάπτυξης που δυνητικά μπορεί να επιτύχει, με τη βοήθεια άλλων ατόμων και με τη χρήση κατάλληλων πολιτισμικών εργαλείων (Σολομωνίδου, 2006).

Η κατασκευαστική ή κονστρουκτιβιστική άποψη για τη μάθηση (construct= κατασκευάζω) επηρεάστηκε από την αναπτυξιακή θεωρία του Piaget και την εργασία θεωρητικών και ερευνητών παιδαγωγών στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο κονστρουκτιβισμός παραδέχεται ότι ο άνθρωπος οικοδομεί ενεργητικά τη γνώση και δεν τη δέχεται παθητικά. Μια προβληματική κατάσταση δίνει το έναυσμα και λειτουργεί ως αφετηρία για την κατασκευή της νέας γνώσης, την οποία οι υπάρχουσες γνωστικές δομές του ατόμου δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν, καθώς δεν επαρκούν για να τη λύσουν ή να την εξηγήσουν (Σολομωνίδου, 2006). Αυτή η ασυμφωνία οδηγεί τον άνθρωπο μέσα από μια κατάσταση γνωστικής σύγκρουσης στο να ενεργοποιήσει τις ήδη υπάρχουσες γνωστικές δομές, να τις τροποποιήσει και να κατασκευάσει τη νέα γνώση, προκειμένου να ερμηνευτεί και να επιλυθεί το πρόβλημα (Skemp, 1986· Fort, 1992).

Ο Scott (1987) αναφέρει τις εξής βασικές ιδέες της εποικοδομητικής μάθησης:

- α) Η μάθηση προκύπτει μέσα από την επίλυση προβλημάτων όπου προκαλείται γνωστική σύγκρουση, καθώς ο μαθητής πρέπει να διευρύνει τα υπάρχοντα γνωστικά μοντέλα που διαθέτει, ακόμα και να τα αναθεωρήσει (Καφούση & Ντζιαχρήστος, 2000). Για την επίλυσή τους, ο μαθητής καλείται να υπερβεί τις νοητικές δυσκολίες και τα εμπόδια και να αναδιοργανώσει τα γνωστικά του σχήματα (Μπούφη, 1995· Σολομωνίδου, 2006).
- β) Οι μαθητές επινοούν και κατασκευάζουν τις δικές τους μεθόδους, για να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα, καθώς συμμετέχουν ενεργά στη δόμηση των δικών τους νοημάτων (Καφούση & Ντζιαχρήστος, 2000· Μπούφη, 1995).
- γ) Η σημασία της κοινωνικής ομάδας και της κοινωνικής αλληλεπίδρασης για τη μάθηση είναι καθοριστική.
- δ) Το μαθησιακό περιβάλλον, αλλά και η προϋπάρχουσα γνώση, οι στάσεις και οι αξίες του μαθητή επηρεάζουν εξίσου τα μαθησιακά αποτελέσματα.
- ε) Η μάθηση δεν είναι παθητική διαδικασία. Οι μαθητές θέτουν τις δικές τους αξίες και ελέγχουν τη δική τους μάθηση, η οποία είναι δυνατό να περιλαμβάνει εννοιολογική αλλαγή και δραστηριότητα αναδιοργάνωση των υπάρχουσών εννοιών και ιδεών. Ως εκ τούτου, τα υποκείμενα έχουν την τελική ευθύνη για τη δική τους μάθηση (Scott, 1987, *οπ. αναφ.* στο Κόκκοτας, 2009).

Αναφορικά με τα βασικά σημεία του κονστρουκτιβισμού, τα παιδιά χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες γνώσεις τους, κλίνουν στο να βρίσκουν τις δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, παρά να ακολουθούν τις υποδείξεις των δασκάλων. Αναπτύσσουν τις μαθηματικές έννοιες με την ενεργό συμμετοχή τους στις μαθηματικές δραστηριότητες και προσπαθούν να καταλάβουν αυτά που βλέπουν ή ακούν από τους άλλους. Επομένως, η μαθηματική γνώση δεν μεταφέρεται στα παιδιά ούτε και δίνεται έτοιμη (Καφούση & Ντζιαχρήστος, 2000· Μπούφη, 1995). Υπό τη θεώρηση του κονστρουκτιβισμού, μέσα από τη διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να εξασφαλίζονται οι κατάλληλες συνθήκες που θα ευνοούν τους μαθητές να οικοδομούν μόνοι τους τα μαθηματικά σχήματα και έννοιες (Σολομωνίδου, 2006· Φιλίππου & Χρίστου, 1995).

Ένα πρόβλημα αποτελεί το εφαλτήριο για την κατασκευή της νέας γνώσης. Βέβαια, οι καταστάσεις τις οποίες οι μαθητές θεωρούν ως προβληματικές, διαφέρουν ανάλογα με το διανοητικό τους επίπεδο, τις προϋπάρχουσες γνώσεις και τις εμπειρίες που διαθέτουν (Μπούφη, 1995). Ουσιαστικά, κάθε παιδί προσπαθεί να λύσει προβλήματα που του προκαλούν αίσθηση, ανάλογα με τη μαθηματική του ωριμότητα που διαθέτει και τη νοητική του ανάπτυξη. Αυτά τα προβλήματα ενεργοποιούν τους μηχανισμούς και τις ιδέες που προϋπάρχουν σε κάθε παιδί. Το ωθούν να τροποποιήσει τα γνωστικά του σχήματα, ώστε να

προκύπτει η νέα γνώση (Βοσνιάδου, 2005). Επιπρόσθετα, κάθε νέα πληροφορία αφομοιώνεται από τον μαθητή με τρόπο που εξαρτάται από την ποιότητα και την οργάνωση των γνωστικών του δομών. Διαφορετική δομή θα αξιοποιήσει με διαφορετικό τρόπο κάθε νέα πληροφορία ή ιδέα. Κατ' επέκταση, η αφομοίωση κάθε νέας γνώσης συμβαίνει μόνο όταν ενσωματώνεται στην υπάρχουσα γνωστική δομή του μαθητή, διαφορετικά απομονώνεται και χάνεται (Κόκκοτας, 2009).

Κυρίαρχο στοιχείο αποτελεί η κοινωνική διάσταση της μάθησης, καθώς τα μαθηματικά είναι μια ζωντανή ανθρώπινη δραστηριότητα και η κοινωνική αλληλεπίδραση μέσα στην τάξη παίζει καθοριστικό ρόλο στον τρόπο που τα παιδιά τα μαθαίνουν. Όταν το κλίμα μάθησης είναι συνεργατικό, οι μαθητές αναπτύσσουν απόψεις γύρω από το μάθημα και ενθαρρύνονται στο να συζητούν και να διαπραγματεύονται τις λύσεις τους, χωρίς τον φόβο του λάθους. Καλλιεργούνται θετικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά και μειώνεται ο φόβος που προκαλείται από ένα αυταρχικό στιλ διδασκαλίας (Κουτσελίνη, 1991· Σολομωνίδου, 2006).

1.2. Τα κλάσματα

1.2.1. Η έννοια και οι ερμηνείες του κλάσματος

«Ο άνθρωπος μοιάζει με κλάσμα όπου ο αριθμητής είναι ο πραγματικός εαυτός του και ο παρονομαστής η ιδέα που έχει για τον εαυτό του. Όσο μεγαλύτερος ο παρονομαστής, τόσο μικρότερη η αξία του κλάσματος. Και όσο ο παρονομαστής διογκώνεται προς το άπειρο, τόσο το κλάσμα τείνει προς το μηδέν», όπως χαρακτηριστικά έχει αναφέρει ο Ρώσος λογοτέχνης Λέων Τολστόι (1828-1910).

Όπως αναφέρει ο Θ. Εξαρχάκος (1993), οι κλασματικοί αριθμοί είναι γνωστοί από τους αρχαιότετους χρόνους και χρησιμοποιήθηκαν από όλες τις αναπτυγμένες κοινωνίες. Αιγύπτιοι, Βαβυλώνιοι, Ινδοί, Κινέζοι, Αρχαίοι Έλληνες τους γνώριζαν και τους χρησιμοποιούσαν. Η ανάγκη εισαγωγής των κλασματικών αριθμών παρουσιάστηκε, όταν οι άνθρωποι προσπάθησαν να περιγράψουν και να μετρήσουν μια ποσότητα που ήταν μόνο ένα μέρος ενός συνόλου, όπως μισό μήλο, τα δύο τρίτα ενός αγρού κ.ά. ή να συγκρίνουν ένα μέγεθος με ένα άλλο του ίδιου είδους. Έτσι, η έννοια του κλασματικού αριθμού καθορίστηκε αρχικά ως το αποτέλεσμα περιγραφής, υπολογισμού ή μέτρησης. Πολύ γρήγορα παρατηρήθηκε μια επέκταση της έννοιας του κλασματικού αριθμού. Αυτό ήρθε ως αποτέλεσμα της πολλαπλής χρήσης των κλασμάτων λόγω των διαρκώς αυξανόμενων αναγκών. Με τον καιρό η έννοια του κλάσματος έγινε περισσότερο αφηρημένη.

Σήμερα, όταν λέμε κλάσμα, εννοούμε έναν αριθμό που έχει τη μορφή α/β , με α και β φυσικούς αριθμούς και $\beta \neq 0$. Ο επιστημονικός όρος, που αναφέρεται στις εσωτερικές ερμηνείες, τις οποίες το ίδιο το άτομο κατασκευάζει, για να δώσει νόημα στον κόσμο τριγύρω του, είναι τα σχήματα (Κολέζα, 2000). Επιχειρείται, στη συνέχεια, ένας διαχωρισμός των διδακτικών ερμηνειών και σχημάτων του κλάσματος, όχι αυθαίρετος, αλλά όπως προκύπτει από τη μελέτη των ερευνών που υπάρχουν έως σήμερα, καθώς έχουν γίνει κατά καιρούς διάφορες κατηγοριοποιήσεις από τους επιστήμονες, για να κατατάξουν τις διαφορετικές ερμηνείες ενός ρητού.

Σχήμα «μέρος-όλου»: Στην ερμηνεία αυτή, το όλο που μπορεί να είναι μια επιφάνεια ή ένα σύνολο από αντικείμενα, χωρίζεται σε ίσα μέρη, όσα δείχνει ο παρονομαστής του κλάσματος. Από αυτά παίρνουμε ένα μέρος, όσα υποδεικνύει ο αριθμητής. Η έννοια του μέρους-όλου είναι η πρώτη που παρουσιάζεται στους μαθητές στο δημοτικό και πολλές φορές η προσέγγιση της έννοιας του κλάσματος περιορίζεται διδακτικά σε αυτό το σχήμα (Κολέζα, 2000). Είναι σημαντικό για τους μαθητές, όπως επισημαίνουν και οι Charalambous και Pitta-Pantazzi (2007), όχι μόνο να κατανοήσουν την έννοια του μέρους-όλου, αλλά να μπορούν και οι ίδιοι να χωρίσουν ένα ολόκληρο σε ίσα μέρη και να παρέμβουν δημιουργικά στον σχηματισμό κλασμάτων μέσα από ποικίλες δραστηριότητες.

Πηλίκιο: Στο σχήμα αυτό, σε αντίθεση με το σχήμα «μέρος-όλου», ο αριθμητής δηλώνει την ποσότητα που διαμοιράζεται και ο αριθμητής τον αριθμό των κομματιών στα οποία μοιράζουμε. Για παράδειγμα, όταν έχουμε να μοιράσουμε 3 πίτσες σε 4 φίλους, προκύπτει το κλάσμα $\frac{3}{4}$, το οποίο αντιστοιχεί στο πηλίκιο της διαίρεσης (MacLeod & Newmarch, 2006). Οι μαθητές δυσκολεύονται πολλές φορές να αντιληφθούν τον ρόλο του κάθε κλασματικού όρου καθώς, επίσης, και το γεγονός ότι αριθμητής και παρονομαστής φανερώνουν διαφορετικά είδη αντικειμένων. Ως εκ τούτου, στην πράξη εμφανίζονται κάποιες παρανοήσεις εννοιολογικού και γλωσσικού χαρακτήρα, οι οποίες μπορεί να δημιουργήσουν σύγχυση στους μαθητές (Σταφυλίδου, 2001).

Λόγος: Στην περίπτωση αυτή, δεν έχουμε να κάνουμε με διαμέριση αλλά με σύγκριση δύο ποσοτήτων. Επομένως, οι κλασματικοί όροι κι εδώ δηλώνουν διαφορετικά στοιχεία. Η δυσκολία που συναντούν οι μαθητές εδώ αφορά στον σχηματισμό της αναλογίας και στον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η αναλογία, όταν μεταβάλλονται οι όροι της. Για να παραμείνει σταθερή η αναλογία, πρέπει οι δύο ποσότητες να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό (Σταφυλίδου, 2001).

Μέτρο: Το κλάσμα ως μέτρο αφορά την επανάληψη της κλασματικής μονάδας, προκειμένου να προκύψει μέτρηση ενός διαστήματος ή μιας απόστασης. Το μοντέλο που

χρησιμοποιείται, συνήθως, για την κατανόηση αυτής της ερμηνείας είναι η αριθμητική γραμμή. Όπως αναφέρει η Κολέζα (2000), οι μαθητές δυσκολεύονται να τοποθετήσουν κλάσματα πάνω στην αριθμογραμμή, καθώς συνηθίζουν να μετρούν γραμμές και όχι διαστήματα.

Τελεστής: Το κλάσμα α/β αποτελεί μια «μηχανή ή συνάρτηση» που μετατρέπει μια ποσότητα σε μια άλλη. Το κλάσμα, δηλαδή, είναι ο πολλαπλασιαστής, με τον οποίο γίνεται πολλαπλασιασμός της αρχικής ποσότητας για να προκύψει η τελική ποσότητα (Κολέζα, 2000). Το κλάσμα ως τελεστής μεγεθύνει ή συρρικνώνει, μειώνει ή επεκτείνει μια δοσμένη ποσότητα, στην οποία εφαρμόζεται (Charalambous & Pitta-Pantazzi, 2007). Οι Charalambous και Pitta-Pantazzi (2007) εξηγούν ότι μπορούμε να σκεφτόμαστε αυτήν την ερμηνεία του κλάσματος ως μια διαδικασία δύο βημάτων: πρώτα πολλαπλασιάζεται μια ποσότητα με τον αριθμητή κι έπειτα ακολουθεί η διαίρεση του αποτελέσματος με τον παρονομαστή του κλάσματος.

Τα κλάσματα είναι το πρώτο πεδίο για την εμπειρία των παιδιών όπου ένας αριθμός δεν αντιπροσωπεύει μια αρίθμηση αλλά κάτι άλλο. Η έννοια του κλασματικού μέρους σχετίζεται απόλυτα με το όλο και όσον αφορά στα μοντέλα, ενδέχεται να συνίσταται άλλοτε σε ένα κομμάτι και άλλοτε σε πολλά κομμάτια. Όπως αναφέρει ο VanDeWalle (2007), τα παιδιά δείχνουν να καταλαβαίνουν την έννοια του χωρισμού μιας ποσότητας σε δύο ή περισσότερα μέρη που πρέπει να μοιραστούν μεταξύ φίλων. Η κατανοητή αυτή έννοια της μοιρασιάς είναι, επομένως, ένα καλό εφαλτήριο για τη συζήτηση των κλασματικών μερών (VanDeWalle, 2007).

1.2.2. Ανάπτυξη της έννοιας των κλασμάτων

Σύμφωνα με τους Langford και Starullo (1992), η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών –και κατ' επέκταση της έννοιας των κλασμάτων– ακολουθεί μια πορεία με τέσσερα στάδια:

- i. Προλεκτικό στάδιο: Στο στάδιο αυτό οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τη μαθηματική έννοια παίζοντας με συγκεκριμένα αντικείμενα ή παρατηρώντας αντικείμενα του περιβάλλοντός τους. Αντιλαμβάνονται, για παράδειγμα, ότι για να πάρουν το ένα τέταρτο ενός φύλλου χαρτιού, αρκεί να το διπλώσουν στα τέσσερα με τρόπο που να μην προεξέχει καμιά πλευρά ή κορυφή, να το κόψουν σε τέσσερα ίσα μέρη και να πάρουν το ένα από αυτά.
- ii. Λεκτικό στάδιο: Στο στάδιο αυτό οι μαθητές μπορούν να εκφράσουν με λόγια τις πράξεις και τις παρατηρήσεις τους. Μπορούν, δηλαδή, να εξηγήσουν ότι διπλώνοντας το φύλλο χαρτιού δημιουργούν «μισά» ή ότι διπλώνοντας δύο φορές

το χαρτί δημιουργούν «μισά των μισών». Μέσα από τη συζήτηση οι μαθητές θα αντιληφθούν ότι τα μισά είναι ισοδύναμα και οποιαδήποτε κομμάτια δεν είναι ισοδύναμα, δεν είναι μισά.

- iii. Προ-αφηρημένο στάδιο: Στο στάδιο αυτό οι μαθητές είναι ικανοί να αντιληφθούν μια έννοια και από τη μελέτη σχετικών κειμένων. Περιλαμβάνει δραστηριότητες ανάγνωσης και γραφής λέξεων σχετικών με την έννοια. Μπορούν, για παράδειγμα, να διαβάσουν για το «μισό» από ένα βιβλίο των μαθηματικών και να κατανοήσουν την έννοια.
- iv. Αφηρημένο στάδιο: Στο τέταρτο στάδιο οι μαθητές ασχολούνται με την ανάγνωση και γραφή των αφηρημένων συμβόλων που αναπαριστούν μια μαθηματική έννοια. Εδώ οι μαθητές μπορούν να γράψουν και να αναγνωρίσουν την αφηρημένη-συμβολική γραφή του «μισού».

Στα πρώτα τρία στάδια οι μαθητές χρησιμοποιούν άτυπα τους όρους των μαθηματικών, ενώ στο τελευταίο στάδιο χρησιμοποιούν την τυπική ορολογία. Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών στηρίζεται στα τρία πρώτα στάδια περισσότερο στη διερεύνηση με τη βοήθεια εποπτικών μέσων και μοντέλων.

1.2.3. Δυσκολίες και παρανοήσεις στην κατανόηση των κλασμάτων

Η κατανόηση των κλασματικών αριθμών συγκεντρώνει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον, καθώς αποτελεί μία από τις κύριες μαθηματικές δεξιότητες που οδηγεί στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Ωστόσο, θεωρείται δύσκολη μαθηματική έννοια και σημαντικός αριθμός μαθητών αποτυγχάνει να την κατανοήσει. Πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι η διδασκαλία και η εκμάθηση των κλασμάτων είναι ένα αντικείμενο ιδιαίτερα δύσκολο για τα παιδιά, «είναι παραδοσιακά ένας από τους περίπλοκους τομείς των μαθηματικών στο δημοτικό» (Charalambous & Pitta-Pantazzi, 2007) και ενώ οι μαθητές φαίνεται ότι κατανοούν πλήρως τις έννοιες που σχετίζονται με τα κλάσματα, στην πραγματικότητα, όμως, δε συμβαίνει αυτό. Μέσα από τη μελέτη των ερευνών που έχουν υλοποιηθεί από την ερευνητική κοινότητα, διαπιστώνεται ο τρόπος που μαθαίνουν οι μαθητές τα κλάσματα, καθώς και οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν.

Πολλοί παράγοντες επιδρούν και δυσκολεύουν τα παιδιά να κατανοήσουν σε βάθος την έννοια των κλασμάτων. Οι Charalambous και Pitta-Pantazzi (2007) και Smith (2002) αναφέρουν τον συμβολισμό των κλασμάτων ως παράγοντα δυσκολίας. Οι δύο φυσικοί αριθμοί που βρίσκονται ο ένας κάτω από τον άλλον και χωρίζονται από την κλασματική γραμμή δυσκολεύουν τους μαθητές να αντιληφθούν το κλάσμα ως αριθμό με συγκεκριμένο

μέγεθος. Σύμφωνα με τις Vamvakoussi και Vosniadou (2004), έως τα μέσα του δημοτικού σχολείου τα περισσότερα παιδιά έχουν οικοδομήσει μια σαφή εικόνα για την έννοια του αριθμού, με τον κάθε αριθμό να έχει μια συγκεκριμένη θέση στην αριθμητική ακολουθία και να έχει μια και μοναδική μορφή και συμβολισμό.

Η έννοια του ρητού αριθμού δεν ακολουθεί τις πιο πάνω παραδοχές του φυσικού αριθμού. Οι Vamvakoussi και Vosniadou (2004) αναφέρουν μεταξύ άλλων: Οι ρητοί αριθμοί παρουσιάζουν μεγάλη πυκνότητα (άπειροι ρητοί βρίσκονται μεταξύ δύο τυχαίων ρητών), δεν ακολουθούν τη σειρά και το σκεπτικό για τη διάταξη των φυσικών αριθμών (το $1/4$ είναι μεγαλύτερο από το $1/5$), ενώ ο αριθμός που έχει τα πιο πολλά ψηφία δεν είναι οπωσδήποτε ο μεγαλύτερος. Οι τέσσερις πράξεις έχουν ως αποτέλεσμα είτε να μεγαλώνουν είτε να μικραίνουν τους αριθμούς. Ο πολλαπλασιασμός στους ρητούς δεν ερμηνεύεται πάντα ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και η διαίρεση δύσκολα εκλαμβάνεται ως μερισμός. Οι πιο πάνω διαφορές φυσικού και ρητού αριθμού δυσχεραίνουν την κατανόηση των κλασμάτων, καθώς έρχονται σε αντίθεση με την ήδη υπάρχουσα γνώση των μαθητών, δηλαδή την έννοια του φυσικού αριθμού (Σταφυλίδου, 2001).

Σύμφωνα με αρκετούς ερευνητές, ένας επιπλέον παράγοντας που δυσκολεύει την εκμάθηση και την κατανόηση των κλασμάτων είναι η μορφική πολλαπλότητα της έννοιάς τους: ως μέρος ενός όλου, ως προϊόν διαίρεσης, ως ποσοστό, ως λόγος δύο μεγεθών, ως αποτέλεσμα σύγκρισης (Δημητριάδης & Σολομωνίδου, 1997). Ο Kieren (1993) ήταν ο πρώτος που περιγράφει ότι η έννοια των κλασμάτων δεν είναι ένα ενιαίο κατασκευάσμα, αλλά αποτελείται από πολλά αλληλοσυνδεδεμένα υποσυστήματα. Αναφέρει τέσσερις τέτοιες μορφές: πηλίκιο, μέτρηση, τελεστή και λόγο. Δεν αναφέρεται στην κατασκευή μέρος-όλου, διότι θεωρεί ότι διαχέεται στις περισσότερες από τις άλλες μορφές. Οι Behr, Lesh, Post και Silver (1983) επεκτείνουν την ιδέα του Kieren και προσθέτουν την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου ως μια ξεχωριστή υποκατηγορία. Τέλος, η Marshall (1993) και η Κολέζα (2000) έχοντας συνδυάσει όλες τις προηγούμενες απόψεις, επιχειρούν μια πιο σφαιρική θεώρηση και διακρίνουν πέντε μορφές των ρητών αριθμών: μέρος-όλου, μέτρο (μέτρηση), λόγος, πηλίκιο και τελεστής.

Μια άλλη πιθανή αιτία της δυσκολίας στην κατανόηση και εκμάθηση των κλασμάτων εστιάζεται στον τρόπο διδασκαλίας και στην έμφαση που δίνεται στην εκμάθηση των αλγορίθμων παρά στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης. Η βιβλιογραφική έρευνα οδηγεί στην παραδοχή ότι χρειάζεται προσοχή, διότι η υπερβολική έμφαση που δίνεται στο σχήμα μέρος-όλου υποβαθμίζει τον ρόλο του κλάσματος ως αριθμό και εμποδίζει την ανάπτυξη άλλων σχημάτων, περιορίζοντας έτσι γνωστικά τους μαθητές

(Boulet, 1998). Η παραδοσιακή διδασκαλία περιορίζεται σε αυτήν την οπτική γωνία του κλάσματος, περιλαμβάνει την πρόωρη χρήση συμβόλων και αλγορίθμων και χρησιμοποιεί λιγοστά παραδείγματα αναπαράστασης. Συνήθως προβάλλεται το σχήμα μιας πίτσας που διαμοιράζεται σε ίσα μέρη. Στη συνέχεια, με γρήγορο πέρασμα στους αριθμητικούς αλγόριθμους οδηγείται ο μαθητής ισοπεδωτικά στην έννοια του ρητού αριθμού. Οι μαθητές με ικανότητα αποστήθισης αλγορίθμων μαθαίνουν να χειρίζονται τα κλάσματα σε όλες τις περιπτώσεις, ενώ οι λιγότερο προετοιμασμένοι μαθαίνουν μέσα από μια διαδικασία δοκιμής-λάθους ή καθόλου. Όταν οι κλασματικές έννοιες γίνονται πιο σύνθετες, το θέμα διεκπεραιώνεται σε ένα πιο τυπικό επίπεδο (VanDeWalle, 2007).

Αρκετοί δάσκαλοι διδάσκουν τα κλάσματα με τον τρόπο που τα σκέφτεται ένας ενήλικας κι όχι ένα παιδί. Περιορίζονται στην τυπική συμβολική αναπαράσταση και παρουσίαση των κλασμάτων, όπως αυτή έχει δομηθεί στο νοητικό πλαίσιο ενός ενήλικα. Κατά τη διδασκαλία, τονίζεται η διαδικαστική γνώση, όπου οι κανόνες, οι διαδικασίες και οι αλγόριθμοι μαθαίνονται μηχανικά και τυπικά, χωρίς να συνδέονται με την έννοια και χωρίς οι μαθητές να κατανοούν γιατί τα εφαρμόζουν. Επιπλέον, ο τρόπος που παρουσιάζονται οι αναπαραστάσεις για τα κλάσματα έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και εμπεριέχει συχνή καθοδήγηση, χωρίς ο μαθητής να έχει τη δυνατότητα να αυτενεργήσει και να δημιουργήσει. Για παράδειγμα, ο μαθητής έχει να σκιάσει τα $\frac{3}{4}$ ενός ορθογωνίου ή ενός κύκλου, τα οποία είναι εκ των προτέρων χωρισμένα σε 4 ίσα μέρη. Ως εκ τούτου, η διαχείριση αυτών των σχημάτων τείνει να εξελιχθεί σε στερεότυπη τεχνική.

1.2.4. Επισκόπηση ερευνών σχετικών με τη διδασκαλία των κλασμάτων

Οι Charalambous και Pitta-Pantazzi (2007) πραγματοποίησαν έρευνα, με σκοπό να μελετήσουν τον βαθμό στον οποίο οι μαθητές κατανοούν τις διάφορες ερμηνείες του κλάσματος, που περιέχονται στο θεωρητικό μοντέλο του Behr (1983). Στην έρευνα συμμετείχαν 646 Κύπριοι μαθητές Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης, στους οποίους μοιράστηκε ένα τεστ 50 ερωτήσεων, που αφορούσαν και τις πέντε ερμηνείες, τις οποίες είχαν διδαχτεί όλοι οι συμμετέχοντες στο προηγούμενο διάστημα.

Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν ότι οι μαθητές είχαν υψηλότερες επιδόσεις ως προς την κατασκευή του «μέρους-όλου» και χαμηλότερες ως προς τις άλλες κατασκευές. Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι δυσκολίες που παρουσίασαν οι μαθητές στην κατανόηση των υπόλοιπων σχημάτων του κλάσματος επηρεάζουν αρνητικά την κατανόηση των πράξεων με κλάσματα και της ισοδυναμίας κλασμάτων. Οι ερευνητές θεώρησαν ότι οι δυσκολίες που παρουσίασαν οι μαθητές, οφείλονται στην ιδιαίτερη έμφαση που δίνεται από

το Αναλυτικό Πρόγραμμα στο σχήμα του «μέρους-όλου», παραγκωνίζοντας τις υπόλοιπες ερμηνείες, και συνέστησαν στους δασκάλους να αποσαφηνίζουν τις έννοιες και να μην περιορίζονται στη μηχανιστική διδασκαλία κανόνων και συμβολικών αναπαραστάσεων (Charalambous & Pitta-Pantazzi, 2007).

Από το 1983 μέχρι το 1986 διενεργήθηκε μια έρευνα πάνω στα κλάσματα από το OW&OC² (Streefland, 1991). Αυτή η έρευνα αποσκοπούσε στην ανάπτυξη ενός πρότυπου μαθήματος γύρω από τα κλάσματα και στη θεμελίωση μιας ρεαλιστικής θεωρίας για τη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων (Treffers, 1987). Η συγκεκριμένη έρευνα έχει ως επίκεντρο τη μελέτη των ατομικών μαθησιακών διαδικασιών. Μέσω μιας πειραματικής διδασκαλίας και με ατομικές συνεντεύξεις, έγινε προσπάθεια να συνδεθούν το μάθημα και η διδακτική μέθοδος με τις ατομικές μαθησιακές διαδικασίες. Οι μαθητές με τις ατομικές τους κατασκευές και τις ατομικές τους δημιουργίες κατάφεραν να συνεισφέρουν στο υπό ανάπτυξη μάθημα. Τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι μια προσέγγιση των κλασμάτων σε πολύ τυπικό επίπεδο καταλήγει σε τυφλή εκτέλεση κανόνων, ειδικότερα για τους πιο αδύναμους μαθητές. Αυτό, όμως, καταπνίγει την εννοιολογική αποσαφήνιση των κλασμάτων και μια πιο ολοκληρωμένη αντίληψη για τα κλάσματα (Streefland, 1991· Streefland, 1993).

Η έρευνα που διεξήχθη από τους Brown και Quinn (2006) αναδεικνύει τα πρότυπα λαθών (error patterns) που προκύπτουν όταν οι μαθητές απαντούν σε ερωτήσεις εφαρμόζοντας τις κλασματικές έννοιες και εκτελώντας πράξεις με κλάσματα.. Στην έρευνα συμμετείχαν 143 μαθητές της 9ης και 10ης τάξης. Η ανάλυση βασίζεται σε δοκιμασία που περιλαμβάνει 25 ερωτήσεις. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, μόνο το 46% των μαθητών που συμμετείχαν είχε επιτυχία όσον αφορά την κατανόηση των ποσοστών και των κλασμάτων. Οι περισσότεροι από τους συμμετέχοντες μαθητές είχαν ελλιπή κατανόηση των κλασματικών εννοιών και των πράξεων με κλάσματα. Ο σκοπός της έρευνας είναι να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς στην ανίχνευση και διόρθωση των κοινών λαθών που κάνουν οι μαθητές, όταν χειρίζονται κλασματικούς αριθμούς.

Αρκετοί από τους μαθητές που συμμετείχαν, απάντησαν σε ερωτήσεις χρησιμοποιώντας αριθμητικούς τύπους και συμβολισμούς που δεν είχαν κατανοήσει με επάρκεια. Το αποτέλεσμα ήταν να κάνουν αρκετά λάθη. Αυτό φανερώνει πως πρέπει να προηγείται η εννοιολογική αποσαφήνιση των κλασμάτων και να μην περιορίζεται η διδασκαλία των κλασμάτων σε αλγόριθμους και συμβολισμούς (Brown & Quinn, 2006).

²Διεθνές Ινστιτούτο για την ανάπτυξη της Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Μια σειρά ερευνών έχουν διεξαχθεί σχετικά με την κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές και τις δυσκολίες που αυτοί αντιμετωπίζουν. Η έρευνα που έγινε από τον Boulet (1998) παρέχει μια επισκόπηση της εννοιολογικής ανάλυσης της κλασματικής μονάδας. Η έρευνα απευθυνόταν σε μαθητές της 4ης τάξης δημοτικού, στους οποίους δόθηκε μια σειρά δραστηριοτήτων. Αποκαλύπτει τις δυσκολίες των μαθητών στην εκμάθηση της έννοιας της κλασματικής μονάδας και αναφέρεται στις διδακτικές επιπτώσεις αυτών των δυσκολιών στην περαιτέρω κατανόηση των κλασματικών εννοιών.

Η έρευνα που διεξήχθη από τους Lortie-Forgues, Tian και Siegler (2015) απευθυνόταν σε μαθητές της 6ης και της 8ης τάξης και αφορά την πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επειδή τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί αποτελούν, σύμφωνα με τους ερευνητές, κρίσιμης σημασίας έννοιες, από την κατανόηση των οποίων εξαρτάται η μεταγενέστερη επιτυχία στα μαθηματικά, καθώς και η ικανότητα επιτυχίας σε πολλά επαγγέλματα, διερευνώνται εδώ οι δυσκολίες που παρουσιάζουν μαθητές και σπουδαστές και πώς μπορούν αυτές να ξεπεραστούν. Αναγνωρίζουν δύο ομάδες δυσκολιών: α) αυτές που είναι εγγενείς στα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς και β) αυτές που είναι πολιτιστικής προέλευσης και σχετίζονται με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών. Μέσα στα πλαίσια της έρευνας υλοποιήθηκαν τρεις παρεμβάσεις με στόχο να ξεπεραστούν οι δυσκολίες των μαθητών. Στο τέλος, μέσα από τη συζήτηση αναζητούνται τα κοινά σημεία τους και προτείνονται τρόποι διδακτικής παρέμβασης και αντιμετώπισης των δυσκολιών.

Οι Behr, Wachsmuth, Post και Lesh (1984) διερεύνησαν κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν έννοιες και διαδικασίες όπως η διάταξη και η ισοδυναμία των κλασμάτων. Η έρευνα έγινε σε δώδεκα μαθητές της 4ης τάξης του δημοτικού στην πόλη Μινεσότα και στο Γλινόις και είχε διάρκεια δεκαοχτώ εβδομάδες, με παράλληλη διδακτική παρέμβαση που ολοκληρώθηκε σε δεκατρία μαθήματα. Ο κάθε μαθητής έδωσε έντεκα συνεντεύξεις. Σε έξι μαθητές δόθηκαν εκτενείς οδηγίες σχετικά με τη χρήση των βοηθητικών μέσων, μοντέλων και αναπαραστάσεων. Κάποιοι εργάστηκαν μόνοι τους και κάποιοι μέσα στην ομάδα. Η διδακτική παρέμβαση κάλυπτε πέντε θέματα: έννοια του κλάσματος, ισοδυναμία, σύγκριση κλασμάτων σε ζεύγη τριών τύπων: κλάσματα με ίδιο αριθμητή, με ίδιο παρονομαστή, με διαφορετικό αριθμητή και παρονομαστή, πρόσθεση με ίδιους παρονομαστές και πολλαπλασιασμό. Οι μαθητές έπρεπε να αναπαραστήσουν και να αντιστοιχίσουν χρησιμοποιώντας υλικά, εικόνες, σύμβολα και λέξεις. Μετά την εκτενή καθοδήγηση, οι περισσότεροι μαθητές είχαν επιτυχείς απαντήσεις, σε μεγαλύτερο ποσοστό από τους μαθητές που δε δέχτηκαν τη διδακτική καθοδήγηση. Υπήρξαν, όμως, και κάποιοι που συνέχιζαν να επιδεικνύουν ανεπαρκή κατανόηση.

Οι Keijzer και Terwel (2003) διεξήγαγαν μια διαχρονική μελέτη σχετική με τη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων με τη χρήση μοντέλων αναπαράστασης, σε δύο ομάδες των δέκα ατόμων ηλικίας εννέα έως δέκα ετών. Στην πειραματική ομάδα εισάγονται κλάσματα χρησιμοποιώντας το μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και του ορθογωνίου. Επιπλέον, στην ομάδα αυτή οι μαθητές εργάζονται συνεργατικά και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου, όπου οι μαθητές εργάζονται ο καθένας μόνος του. Η απόδοση των μαθητών των δύο ομάδων συγκρίνεται τακτικά κατά τη διάρκεια ενός έτους. Μετά από ένα χρόνο, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας δείχνουν περισσότερη επάρκεια στα κλάσματα από εκείνους της ομάδας ελέγχου.

Οι Cramer και Wyberg (2009) διερεύνησαν την επίδραση διαφορετικών, συγκεκριμένων και εικονογραφικών μοντέλων στην κατανόηση από τους μαθητές της ερμηνείας του κλάσματος ως μέρος-όλου. Χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα συνέντευξης από μαθητές της 4ης και 5ης τάξης από τρεις διαφορετικές περιοχές. Μέσω της έρευνας αυτής οι ερευνητές αναγνώρισαν τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν. Στα συμπεράσματα αναφέρεται ότι τα πρότυπα μοντέλα είχαν περιορισμένη αξία, ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να κατασκευάσουν νοητικά την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου, καθώς και περιορισμένη αξία στο να οικοδομήσουν την έννοια της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων. Το μοντέλο που βασίζεται στη δραστηριότητα του διπλώματος του χαρτιού, υποστήριξε την ικανότητα των μαθητών να διατάσσουν κλάσματα με ίδιους αριθμητές, αλλά ήταν λιγότερο χρήσιμο σε διαδικασίες υπολογισμού και εκτίμησης. Οι μαθητές δε βοηθήθηκαν στην κατανόηση του αλγόριθμου των πράξεων με κλάσματα.

Οι Σταφυλίδου και Βοσνιάδου (2004) διεξήγαγαν ένα πείραμα που διερεύνησε την ανάπτυξη της κατανόησης από τους μαθητές της αριθμητικής αξίας των κλασμάτων. Συνολικά 200 μαθητές ηλικίας από 10 έως 16 ετών δοκιμάστηκαν χρησιμοποιώντας ένα ερωτηματολόγιο που ζητούσε να συγκρίνουν κλάσματα, να διατάξουν ένα σύνολο συγκεκριμένων κλασμάτων και να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Οι απαντήσεις των μαθητών ομαδοποιήθηκαν σε τρεις κατηγορίες που δείχνουν τρία βασικά επεξηγηματικά πλαίσια που ερμηνεύουν τα κλάσματα. Το πρώτο πλαίσιο που αναδύεται απευθείας από την αρχική θεωρία των φυσικών αριθμών, είναι ότι το κλάσμα αποτελείται από δύο ανεξάρτητους αριθμούς. Το δεύτερο θεωρεί τα κλάσματα ως μέρη ενός συνόλου. Μόνο στο τρίτο πλαίσιο οι μαθητές ήταν σε θέση να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή και να θεωρήσουν ότι τα κλάσματα μπορούν να είναι μικρότερα, ίσα ή και μεγαλύτερα από τη μονάδα.

Η Hannula (2003) διεξήγαγε έρευνα που απευθυνόταν σε 3.067 Φινλανδούς μαθητές 5ου και 7ου επιπέδου και περιείχε συνεντεύξεις πάνω στην εργασία είκοσι μαθητών 7ου επιπέδου. Ο σκοπός της μελέτης είναι να διερευνηθεί η κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές. Δύο εργασίες πλαισιώνουν ένα συγκεκριμένο κλάσμα, το κλάσμα $\frac{3}{4}$, σε διαφορετικά πλαίσια: ως μέρος μιας γραμμής οκτώ τεμαχίων και ως θέση σε αριθμητική γραμμή. Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι η κατανόηση του κλάσματος από τους μαθητές αναπτύσσεται κυρίως από την 5η έως την 7η τάξη. Επιπλέον, η έννοια του κλάσματος ως μέρος του όλου κυριαρχεί στη σκέψη των μαθητών και οι μαθητές έχουν δυσκολίες να αντιληφθούν ένα κλάσμα ως αριθμό σε μια γραμμή αριθμών, ακόμα και στην 7η τάξη.

1.2.5. Μορφές αναπαράστασης κλασμάτων και ο ρόλος τους στη μαθησιακή διαδικασία

Ένας από τους σημαντικότερους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν το νόημα των αριθμητικών συμβόλων και διαδικασιών και να μην περιοριστούν σε μια μηχανική, διαδικαστική γνώση. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω της σύνδεσης των συμβολικών αναπαραστάσεων με καταστάσεις, διαδικασίες ή μοντέλα που έχουν νόημα για τους μαθητές ή αποτελούν προσωπικές κατασκευές τους. *Τα μοντέλα είναι νοητικοί μαθηματικοί χάρτες που τους χρησιμοποιούν, καθώς επιλύουν προβλήματα ή εξερευνούν σχέσεις. Για παράδειγμα, όταν οι μαθηματικοί σκέφτονται έναν αριθμό, πρέπει να έχουν μια αριθμητική γραμμή στο μυαλό τους. Σκέφτονται πού οι αριθμοί είναι σε σχέση μεταξύ τους στη γραμμή αυτή και φαντάζονται να μετακινούνται εμπρός και πίσω στη γραμμή αυτή* (Fosnot & Dolk, 2002, οπ. αναφ. στο Petit, Laird & Marsden, 2010).

Οι αναπαραστάσεις χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες (VanDeWalle, 2007):

- **Εσωτερικές ή νοητικές:** Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται σε νοητικά σχήματα που δημιουργούν τα άτομα, για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα και δεν τα αντιλαμβάνονται οι άλλοι.
- **Εξωτερικές ή σημειωτικές:** Είναι τα εξωτερικά εργαλεία, όπως σύμβολα, διαγράμματα, σχήματα, προφορική γλώσσα, που στόχο έχουν να αναπαραστήσουν εξωτερικά μία συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση.

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην επίλυση γενικά των μαθηματικών προβλημάτων έχει τονισθεί από πολλούς ερευνητές. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις, όπως λέξεις, εικόνες, σχήματα, υλικά αντικείμενα, ψηφιακά περιβάλλοντα H/Y, είναι συστήματα έκφρασης που χρησιμοποιούνται, για να διασαφηνίσουν μαθηματικές έννοιες και

διαδικασίες κι έτσι να δημιουργήσουν ακριβέστερα νοητικά μοντέλα της έννοιας, όπως αναφέρει η Κολέζα (2000). Ως εκ τούτου, η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να στοχεύει, μεταξύ των άλλων, στην εξοικείωση των μαθητών με μια όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ποικιλία μοντέλων αναπαράστασης.

Επιπλέον, ο δάσκαλος πρέπει να συμβάλλει, ώστε οι μαθητές να μάθουν να χτίζουν τα δικά τους μοντέλα αναπαράστασης μαθηματικών ιδεών και καταστάσεων. Ειδικότερα για τη διδασκαλία των κλασμάτων, προκύπτει, μέσα από τη βιβλιογραφική επισκόπηση των ερευνών, ο ιδιαίτερος ρόλος που παίζουν τα μοντέλα αναπαράστασης, καθώς πολλές δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών, όπως προαναφέρθηκε στο αντίστοιχο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας³, οφείλονται στη λανθασμένη ερμηνεία των συγκεκριμένων αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται. Οι εκπαιδευτικοί, μάλιστα, πρέπει να είναι άριστα προετοιμασμένοι και καταρτισμένοι, ώστε να επιλέγουν την καταλληλότερη αναπαράσταση για την εισαγωγή, εμπέδωση και αξιολόγηση μίας έννοιας (McLeod & Newmarch, 2006).

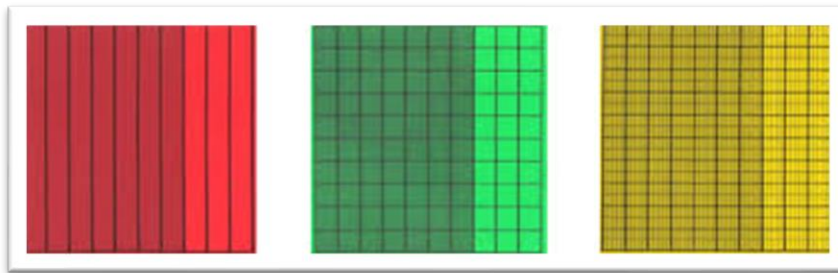
Διακρίνονται τέσσερα διαφορετικά συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων για τη μάθηση των μαθηματικών γενικά, αλλά και των ρητών ειδικότερα:

1. **Καταστάσεις του πραγματικού κόσμου:** Βασίζονται σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής και παρουσιάζονται με αντικείμενα από τον πραγματικό κόσμο. Για παράδειγμα, το δίπλωμα ενός χαρτιού βοηθάει στην κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων. Το κόψιμο φρούτων ή λωρίδων σε ίσα μέρη ή τα τέταρτα του ρολογιού αποτελούν χρήσιμα μοτίβα για την κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων.
2. **Χειροπιαστά αντικείμενα και εικόνες:** Τέτοιου είδους μοντέλα είναι οι κλασματικοί κύκλοι και οι ράβδοι, όπως και τα μπλοκ μοτίβου. Αυτά τα μοντέλα δεν έχουν νόημα από μόνα τους, αλλά αποκτούν νόημα μέσα από τις σχέσεις και τις λειτουργίες που προκύπτουν.
3. **Προφορική γλώσσα:** Αφορά στην εξειδικευμένη μαθηματική γλώσσα. Χρησιμοποιείται στη διατύπωση λεκτικών προβλημάτων, ορισμών και εξηγήσεων σε συνδυασμό με εικόνες και γραπτά σύμβολα.
4. **Γραπτά σύμβολα:** Περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις αποτυπωμένες στη μαθηματική γλώσσα.

Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία των κλασμάτων είναι τριών ειδών, όπως αναφέρει ο VanDeWalle (2007):

³ Βλ. κεφ. 1.2.3 Δυσκολίες και παρανοήσεις στην κατανόηση των κλασμάτων

- **Μοντέλα περιοχής εμβαδού** (συνεχής αναπαράσταση), όπως κυκλικές περιοχές, ορθογώνια μοντέλα, τα σχήματα που έχουν διαφορετικά μεγέθη (pattern blocks), το χαρτί που διπλώνεται. Στα μοντέλα περιοχής, μια επιφάνεια ή περιοχή χωρίζεται σε πιο μικρά κομμάτια (βλ. Εικ. 1). Κάθε τμήμα μπορεί να συγκριθεί με τη συνολική επιφάνεια. Ο VanDeWalle (2007) αναφέρει ότι τα μοντέλα εμβαδού που συναντώνται πιο συχνά είναι οι κυκλικοί δίσκοι.



Εικόνα 1. Μοντέλο επιφάνειας

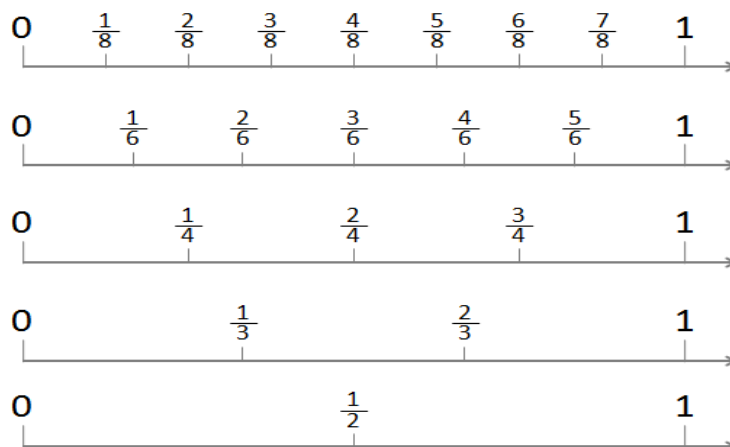
- **Μετρικά μοντέλα:** Τα μοντέλα μέτρησης αφορούν την έννοια του κλάσματος ως μέτρο, που προκύπτει από την επανάληψη της κλασματικής μονάδας. Μοιάζουν με τα μοντέλα εμβαδού, αντί για επιφάνεια, όμως, απεικονίζουν μήκη. Περιλαμβάνουν ράβδους, λωρίδες κλασμάτων, ευθύγραμμα τμήματα και αριθμογραμμές (VanDeWalle, 2007).
- **Μοντέλα συνόλων:** Τα μοντέλα συνόλων αναφέρονται στην έννοια του κλάσματος ως μέρος ενός συνόλου και περιλαμβάνουν διάφορα σύνολα από διακριτά αντικείμενα. Σύμφωνα με τα ευρήματα ερευνών, οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο στα μοντέλα αυτά από ότι στα μοντέλα εμβαδού (Φιλίππου & Χρήστου, 2002).

Η αριθμογραμμή είναι ένα μοντέλο αναπαράστασης κλασμάτων, που έχει πολλές διαφορές από τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις, ως προς τα παρακάτω σημεία (Κολέζα, 2000):

1. Τη μονάδα την αναπαριστά ένα μήκος, δηλαδή η αριθμογραμμή έχει τη μορφή χάρακα, καθώς μπορεί να παρουσιάσει τη μονάδα και τις υποδιαιρέσεις της.
2. Οι συνεχόμενες μονάδες δε διαχωρίζονται, δηλαδή το μοντέλο έχει συνέχεια.
3. Ένα σημείο στην αριθμογραμμή δεν έχει συγκεκριμένο αριθμητικό νόημα, μέχρι που θα καθορισθεί η αριθμητική αξία δύο άλλων τουλάχιστον σημείων αναφοράς.
4. Η υποδιαίρεση των μονάδων μπορεί να γίνεται χωρίς περιορισμούς.

Η αριθμητική γραμμή χρησιμοποιείται για την καλύτερη αντίληψη του κλάσματος ως αποτέλεσμα μέτρησης. Πολλοί μαθηματικοί κι ερευνητές έχουν επισημάνει ότι το να εντοπίζουν οι μαθητές κλάσματα στην αριθμογραμμή, αποτελεί ουσιώδη ενέργεια για την

κατανόησή τους ως αριθμούς και όχι μόνο ως μέρη μιας πίτσας-ενός όλου (Hannula, 2003). Παράλληλες αριθμογραμμές μπορούν να λειτουργήσουν ως μια μορφή αναπαράστασης της έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων (βλ. Εικ. 2).



Εικόνα 2. Αριθμητικές γραμμές

Η Κολέζα (2000) προτείνει το κουτί των κλασμάτων ως μια εναλλακτική λύση για τη χρήση του μοντέλου της αριθμογραμμής (βλ. Εικ. 3). Με βάση αυτό το μοντέλο μπορούν εύκολα να απαντηθούν ερωτήσεις του τύπου: «Ποιο είναι το μεγαλύτερο το $\frac{1}{2}$ ή το $\frac{1}{3}$;». Το μοντέλο αυτό αναδεικνύει επίσης με τον καλύτερο τρόπο την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων. Επιπλέον, μπορεί να βοηθήσει στην πρόσθεση και την αφαίρεση των κλασμάτων.

1											
$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$	
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{11}$		$\frac{1}{11}$		$\frac{1}{11}$		$\frac{1}{11}$		$\frac{1}{11}$		$\frac{1}{11}$	
$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$	

Εικόνα 3. Το κουτί των κλασμάτων

Σύμφωνα με τις έρευνες, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων που συνδέονται με τις διαφορετικές μορφές του κλάσματος, υποστηρίζει την κατανόηση από τους μαθητές και την κατασκευή των δικών τους εσωτερικών αναπαραστάσεων. Καθώς μπορούν να αλληλεπιδράσουν με μέσα που συνδέονται με τα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες τους, ενεργοποιείται το ενδιαφέρον των μαθητών, έχουν τη δυνατότητα να αναστοχαστούν πάνω στα κλάσματα κι έτσι το μάθημα ξεφεύγει από τον τυπικό του χαρακτήρα.

1.2.6. Οι άτυπες γνώσεις των μαθητών και ο ρόλος τους στη διδασκαλία των κλασμάτων

Οι άτυπες γνώσεις και οι παρανοήσεις δημιουργούνται μέσα από την προσπάθεια των παιδιών να ερμηνεύσουν αυτά που βλέπουν και ακούνε μέσα στον κόσμο στον οποίο αναπτύσσονται, βιώνουν διάφορες καταστάσεις και αποκτούν εμπειρίες με βάση τη γλώσσα που χρησιμοποιούν. Τα παιδιά λειτουργούν όπως οι επιστήμονες, δηλαδή παρατηρούν ό,τι συμβαίνει γύρω τους, συγκεντρώνουν στοιχεία, ομοιότητες και διαφορές και οικοδομούν μοντέλα, προκειμένου να ερμηνεύσουν τα γεγονότα και να εξηγήσουν ό,τι συμβαίνει γύρω τους (Κόκκοτας, 1992· Σολομωνίδου, 2006).

Οι μαθητές έχουν μια αντίληψη των κλασμάτων πριν ακόμα τα διδαχθούν στο σχολείο (Κολέζα, 2000). Διαθέτουν ήδη κάποια άτυπα σχήματα που τους δίνουν την ελευθερία να σκεφτούν και να ενεργήσουν πέρα από τις αυστηρές δεσμεύσεις του τυπικού περιεχομένου της διδασκαλίας. Η άτυπη γνώση που διαθέτουν οι μαθητές όταν έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τα κλάσματα αφορά, κυρίως, τους ακέραιους αριθμούς. Σχηματίζουν σαφή αντίληψη για τους φυσικούς μέσω των εμπειριών τους, σε αντίθεση με τους ρητούς αριθμούς που δε βρίσκονται στο άμεσο περιβάλλον των παιδιών.

Οι παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την ερμηνεία των συμβολικών αναπαραστάσεων και τα λάθη τους στη χρήση των αλγορίθμων οφείλονται, κυρίως, στο ότι εφαρμόζουν άκριτα στα κλάσματα τη γνώση που διαθέτουν για τους ακέραιους. Το γεγονός, μάλιστα, ότι προηγείται η διδασκαλία των φυσικών έναντι των ρητών, έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία νοητικών σχημάτων που λειτουργούν πολλές φορές ανασταλτικά στην κατανόηση των κλασμάτων (Σολομωνίδου, 2006). Μεταφέρουν και γενικεύουν τη γνώση που έχουν για τους ακέραιους, για να κατανοήσουν τη νέα γνώση για τα κλάσματα. Όταν η υπεργενίκευση αυτή συνδυάζεται με τον περιορισμένο χρόνο που αφιερώνεται στη διδασκαλία για την κατάκτηση της έννοιας του κλάσματος και στην περιορισμένη χρήση εποπτικών μέσων και μοντέλων, οδηγεί, ως συνέπεια, στο να περάσουν γρήγορα στη

μηχανική εκμάθηση των κλασμάτων και στο να μην μπορέσουν να εντάξουν ουσιαστικά τη νέα γνώση στα υπάρχοντα νοητικά σχήματα που διαθέτουν.

Η άτυπη γνώση των μαθητών δε σχετίζεται μόνο, όμως, με τους ακέραιους αριθμούς. Οι μαθητές διαθέτουν ήδη μια αντίληψη του κλάσματος, η οποία σχετίζεται με την ερμηνεία ως «μέρος-όλου». Πρόκειται για μια στενή αντίληψη των κλασματικών αριθμών που επηρεάζει και περιορίζει την ευρύτερη κατανόησή τους μέσα από τις άλλες ερμηνείες και σχήματα των κλασμάτων.

Ο ρόλος του δασκάλου για το πέρασμα από την άτυπη στην τυπική γνώση είναι ιδιαίτερα σημαντικός (Κολέζα, 2000). Ο δάσκαλος εισάγει τα παιδιά στην καινούρια τους περιπλάνηση, τα ενθαρρύνει και τα βοηθά να νιώθουν ασφαλή γι' αυτό που κάνουν. Οι μαθητές μπορούν να στηριχτούν στην άτυπη γνώση τους, για να δώσουν νόημα στα μαθηματικά σύμβολα, όμως δεν μπορούν μόνοι τους να πραγματοποιήσουν αυτό το πέρασμα (Σολομωνίδου, 2006). Κατά τη διδασκαλία, πρέπει να δημιουργηθεί η σωστή σύνδεση μεταξύ της άτυπης γνώσης και των συμβολισμών των κλασμάτων και να συμπεριληφθούν οι κατάλληλες δραστηριότητες που θα οδηγήσουν σε ουσιαστική κατανόηση. Σε αυτήν την περίπτωση, η άτυπη γνώση θα αποτελέσει τη στέρεη βάση για προσωπική δημιουργία και οικοδόμηση της νέας γνώσης (Harlen, 1992).

Ο δάσκαλος είναι αυτός που εξασφαλίζει το διδακτικό πλαίσιο, το οποίο δημιουργεί ευκαιρίες στους μαθητές για συστηματικό έλεγχο των απόψεών τους. Τους βοηθάει να εξελίσσουν ή να τροποποιούν τις ιδέες τους. Τους βοηθάει να αποκτήσουν δεξιότητες στις επιστημονικές διαδικασίες και την επίλυση προβλημάτων. Αυτός βοηθάει στην οργάνωση συζητήσεων όπου οι μαθητές εμπλέκονται σε αλληλεπίδραση και ανταλλαγή απόψεων και ιδεών. Προκαλεί τους μαθητές με ιδέες αντίθετες από τις δικές τους και τους ζητάει να τις αξιολογήσουν με κριτική ματιά. Οι μαθητές δείχνουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τις ιδέες για τις οποίες μπορούν και οι ίδιοι να αναπτύξουν επιχειρήματα και άποψη, όχι μόνο ο δάσκαλος. Επιπλέον, ο δάσκαλος τους παρέχει τη δυνατότητα να συζητούν σε μικρές ομάδες, αρχικά ανά δύο ή ανά τρεις, και στη συνέχεια μέσα στη μεγαλύτερη ομάδα της τάξης (Κόκκοτας, 1992).

1.3. Οι νέες τεχνολογίες (ΤΠΕ) ως εργαλείο μάθησης

Ο ρυθμός ανάπτυξης των νέων τεχνολογιών της πληροφορίας και των επικοινωνιών (ΤΠΕ) και η ταχύτητα εξάπλωσής τους σε όλες, σχεδόν, τις ανθρώπινες δραστηριότητες έχουν πάρει εντυπωσιακές διαστάσεις στις μέρες μας. Ο καθοριστικός ρόλος των νέων Μέσων και

Τεχνολογιών είναι σήμερα ευδιάκριτος σε όλο το φάσμα της καθημερινότητας. Έχουν εισχωρήσει σε όλους τους τομείς της κοινωνικής οργάνωσης, όπως οικονομία, διοίκηση, υγεία, ψυχαγωγία και φυσικά, στην εκπαίδευση (Ντρενογιάννη, 2003· Σολομωνίδου, 2006).

Στην εκπαίδευση, ιδιαίτερα, η πρόκληση είναι ακόμα μεγαλύτερη. Από τη μια, πρέπει να εκσυγχρονιστεί εντάσσοντας τις νέες Τεχνολογίες στις εκπαιδευτικές δομές και διεργασίες και από την άλλη, πρέπει να διαμορφωθεί ένα σύγχρονο πλαίσιο εργασίας και μάθησης, όπου οι μαθητές θα αποκτήσουν ικανότητες και δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα (Δάρρα, 2002). Οι ΤΠΕ με τις όλο και αυξανόμενες δυνατότητές τους ως εργαλεία αποθήκευσης, επικοινωνίας, επεξεργασίας και πρόσβασης της πληροφορίας, έχουν δημιουργήσει ένα περιβάλλον, όπου η άγνοια στις νέες τεχνολογίες θα καταστήσει τους ανθρώπους λειτουργικά αναλφάβητους (Τζεκάκη, 2001).

Σύμφωνα με την παραδοσιακή μορφή της εκπαίδευσης, ο εκπαιδευτικός είναι ο κομιστής της πληροφορίας και ο μεταλαμπαδευτής της γνώσης. Αυτό κάνει το σχολείο να μοιάζει εκτός κοινωνίας, να μεταδίδει την αντίληψη ότι υπάρχει μία, αδιαμφισβήτητη αλήθεια και ότι ο ρόλος του σχολείου είναι να την αποκαλύψει στον μαθητή, χωρίς να νοιάζεται καν αν την καταλαβαίνει ή με ποιον τρόπο μπορεί να υποστηριχθεί σε αυτήν του την προσπάθεια (Μπούφη, 1995). Η εκπαίδευση περιορίζεται στο να καλλιεργεί στους μαθητές, κυρίως, την ικανότητα απομνημόνευσης και να τους εξασκεί σε ρουτίνες ακατανόητες και αποστασιοποιημένες από τον κόσμο του μαθητή. Κατά κάποιο τρόπο, στο σχολείο μεταδίδονται γνώσεις και βεβαιότητες ως προετοιμασία για μια ζωή όπου ο καθένας θα παίρνει αποφάσεις βασισμένες σε πολυποίκιλες πληροφορίες, σε έναν κόσμο που πολύ συχνά αλλάζει γύρω του και οι βεβαιότητες σπανίζουν (Δάρρα, 2002).

Από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα, άρχισαν να έρχονται τα πρώτα μηνύματα από τις επιστήμες της αγωγής ότι πρέπει να αλλάξει το σχολικό κλίμα και η μαθησιακή διαδικασία να εκσυγχρονιστεί (Λαφατζή, 2005). Ιδιαίτερα, τα τελευταία είκοσι περίπου χρόνια, που έγινε η μετάβαση στη μεταβιομηχανική κοινωνία ή κοινωνία της πληροφορίας και γνώσης, η πίεση από την επιστήμη για αλλαγή του γενικότερου εκπαιδευτικού κλίματος είναι εντονότερη (Μπούφη, 1995). Η γνώση φαίνεται να είναι διαθέσιμη στον μαθητή ανά πάσα στιγμή και ανεξάρτητα από τον εκπαιδευτικό που θα κάνει το μάθημα στην τάξη. Η έννοια της μεταφοράς ή της μεταβίβασης της γνώσης από τον δάσκαλο αυθεντία στους μαθητές δε γίνεται πλέον αποδεκτή (Δανασσής- Αφεντάκης, 1997).

Αυτό που κάνει ο δάσκαλος είναι να δημιουργεί μηνύματα στους μαθητές που είναι, όμως, διαφορετικά για τον καθένα. Ως εκ τούτου, η γνώση είναι υποκειμενική και ο καθένας κατασκευάζει για τον εαυτό του τη δική του γνώση. Ο καθένας μας ερμηνεύει με

τον δικό του προσωπικό τρόπο τις πληροφορίες που παίρνει από το περιβάλλον μέσω των αισθήσεων. Όταν ο άνθρωπος μαθαίνει, δε δέχεται απλώς αυτό που του προσφέρεται, αλλά το επεξεργάζεται (Wheatley, 1991, οπ. αναφ. στο Κόκοτας, 2009).

Ιδιαίτερα τα Μαθηματικά, όπως αναφέρει ο Lakatos (1976), είναι ένα ανθρώπινο δημιουργήμα λογικής, μια επιστήμη που η εξέλιξή της συνίσταται στη συνεχή αμφισβήτηση και στον επαναπροσδιορισμό των αξιωματικών συστημάτων, των προβλημάτων και των λύσεών τους. Το ζητούμενο στη διδακτική των μαθηματικών είναι να δημιουργήσουν και να αναπτύξουν οι μαθητές προσωπικά νοήματα μέσα από υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους (Καφούση & Ντζιαχρήστος, 2000). Μια διαδικασία που συνίσταται στην ίδια τη φύση της μαθηματικής επιστήμης και τον τρόπο λειτουργίας των μαθηματικών επιστημόνων. *Δόμηση της γνώσης δεν σημαίνει αναγκαστικά παραγωγή νέας γνώσης, αλλά περισσότερο παραγωγή νοημάτων μέσα από την αλληλεπίδραση των μαθητών με το περιβάλλον τους. Με αυτή την έννοια, η «μεταβιβαστική» αντίληψη για τη γνώση και η τεχνική διαχείριση για τη δράση αντικαθίστανται από την εποικοδομιστική αντίληψη κατά την οποία οι γνώσεις δεν μεταδίδονται αλλά οικοδομούνται και αναδομούνται από τον ίδιο το μαθητή* (Μακράκης, 2014, σελ. 53).

Το σημαντικό εδώ είναι ο κάθε μαθητής να κάνει μαθηματικά με τρόπο που θα τον βοηθήσει να κατανοήσει, να αποκτήσει εμπειρία και βιώματα, να χρησιμοποιήσει τη γνώση για δικούς του σκοπούς (Καφούση & Ντζιαχρήστος, 2000· Μπούφη, 1995). Με εξειδικευμένα ψηφιακά μέσα ο μαθητής μπορεί να κάνει μαθηματικά με τρόπο διαφορετικό από την προ τεχνολογίας περίοδο που χρησιμοποιούσε μόνο το χαρτί και το μολύβι, τον χάρακα και τον διαβήτη. Αυτό που προσφέρει παιδαγωγικά και μαθησιακά η ψηφιακή τεχνολογία συνίσταται στο ότι μπορεί να διαθέσει πολλά αναπαραστασιακά εργαλεία με τα οποία ο μαθητής μπορεί να εκφράσει έννοιες, να διαχειριστεί την πληροφορία, να δράσει και εξασκηθεί σε πολυποίκιλες καταστάσεις και εργασίες (Κυνηγός, 2011).

Η αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας για την εμπλοκή των μαθητών σε καταστάσεις με επιπρόσθετη παιδαγωγική αξία θεμελιώθηκε από τον S. Papert, μετά από τη συνεργασία του με τον J. Piaget για μια επταετία στο Πανεπιστήμιο της Γενεύης, προς το τέλος της δεκαετίας του 1960. Η βασική προσέγγιση ήταν ότι κατάλληλα ψηφιακά περιβάλλοντα μπορούν να υποστηρίξουν τη δημιουργική έκφραση των μαθητών, για να εκφράσουν ιδέες κι έννοιες και να αποδώσουν τα δικά τους μαθηματικά αντικείμενα. Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο, ο μαθητής έχει την ευκαιρία να σκέφτεται, ενώ παράλληλα χρησιμοποιεί το ψηφιακό εργαλείο, αλλάζοντας ξανά και ξανά τις παρεμβάσεις του. Με βάση την προσέγγιση αυτή, η τεχνολογία μπορεί να παίξει καταλυτικό ρόλο για τη δημιουργία

μαθησιακών πλαισίων, όπου ο μαθητής θα λειτουργεί ως μικρός επιστήμονας (Papert, 1975 & 1980· Κυνηγός, 2011).

Τα τεχνολογικά μέσα που μπορούν να αποτελέσουν εργαλεία με σημαντικό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία, ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα επικοινωνιακά μέσα και τα νοητικά μοντέλα (Κυνηγός & Δημαράκη, 2002· Ράπτης & Ράπτη, 1999). Τα επικοινωνιακά μέσα συνδέονται με τη δυνατότητα του υπολογιστή να λειτουργεί ως παράθυρο σε πηγές πληροφοριών. Υπάρχουν εφαρμογές που παρέχουν πρόσβαση σε πλούσιο πληροφοριακό υλικό, όπου ο μαθητής μπορεί να αναζητήσει, να αντλήσει και να επεξεργαστεί πληροφορίες. Επιπλέον, ο υπολογιστής ως επικοινωνιακό μέσο δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές για συλλογική επικοινωνία εξ αποστάσεως, γραπτή και προφορική, με στόχο την επίτευξη της συνεργασίας σε διάφορες μορφές ομαδικής εργασίας (Υpsilandis, 2001).

Οι τεχνολογίες ως νοητικά εργαλεία αναφέρονται σε λογισμικά που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για τη μαθησιακή διαδικασία. Με τα νοητικά εργαλεία, οι μαθητές δημιουργούν και πειραματίζονται με μοντέλα φαινομένων, σχέσεων και αναπαραστάσεων. Διερευνούν, ελέγχουν, εκφράζουν, διατυπώνουν και αναπαριστούν ιδέες και έννοιες. Τα εργαλεία αυτά προσομοιώνουν καταστάσεις, φαινόμενα, μοντέλα και δίνουν τη δυνατότητα στον χρήστη να παρέμβει με τρόπο δημιουργικό, για τη δημιουργία των δικών του νοημάτων. Ο μαθητής μπορεί να τα χρησιμοποιεί ως εργαλεία έκφρασης και πειραματισμού (Βοσνιάδου, 2006· Depover, Karsenti & Κόμης, 2010). Η μάθηση εδώ προκύπτει από τη σταδιακή εκμάθηση των κανόνων χρήσης τους, οι οποίοι είναι στενά συνδεδεμένοι με το αντικείμενο που διδάσκεται. Ένα τέτοιο λογισμικό χρησιμοποιήθηκε μέσα στο πλαίσιο της έρευνας, που αναλύεται στο ερευνητικό μέρος της παρούσας εργασίας.

Με την εμπλοκή και την αξιοποίηση του υπολογιστή και των ψηφιακών μέσων στη μαθησιακή διαδικασία, μπορεί να καλλιεργηθούν πτυχές της μάθησης, που πολύ λίγο ενθαρρύνονται και αναγνωρίζονται με τη μετωπική διδασκαλία και είναι, σύμφωνα με τις επιστήμες της αγωγής, ιδιαίτερα σημαντικές και αποτελούν τις κύριες αρχές του τρόπου με τον οποίο μαθαίνουμε (Τζεκάκη, 2001).

- **Δράση.** Η μάθηση προέρχεται από την εμπλοκή του μαθητή σε κάποια δραστηριότητα. Είναι το γνωστό «learning by doing», για το οποίο έχουν μιλήσει μεγάλοι παιδαγωγοί, όπως ο Dewey (1897).
- **Βίωμα.** Ως προέκταση της προηγούμενης αρχής, ο μαθητής μέσα από την εμπλοκή του σε δραστηριότητες, αποκτά βιώματα, δημιουργεί και χτίζει τις δικές του εμπειρίες, σχετικά με τον διδακτικό στόχο. Οι ΤΠΕ με τα πολυμέσα που διαθέτουν,

προσπαθούν να συμπληρώσουν τα κενά της άμεσης εμπειρίας των μαθητών, δίνοντας ευκαιρίες για βιωματική εκπαίδευση (Μακράκης, 2000).

- **Πειραματισμός.** Πρόκειται για τη βάση της επιστημονικής συμπεριφοράς και σκέψης, καθώς ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να διατυπώνει υποθέσεις, να εκτελεί πειραματικές διαδικασίες, να παρατηρεί, να δοκιμάζει εναλλακτικές λύσεις, να διατυπώνει προσωπικά συμπεράσματα, να επαληθεύει, αλλά και να απορρίπτει εικασίες (Κόκκοτας, 2009).
- **Έρευνα-αναζήτηση.** Ο μαθητής δε βλέπει τον κόσμο σαν να αποτελείται από αδιαμφισβήτητες αλήθειες και βέβαιες πληροφορίες, που πρέπει απλά να κατανοήσει. Ενθαρρύνεται να ενεργοποιηθεί μαθησιακά, ώστε να ανακαλύψει κάτι ενδιαφέρον και χρήσιμο για τον ίδιο (Βοσνιάδου, 2006).
- **Δημιουργία νοημάτων.** Οι μαθητές μπορούν να επεξεργάζονται τα μοντέλα, τα οποία είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τις έννοιες και αναπαριστούν το γνωστικό αντικείμενο. Έτσι, ο μαθητής χειρίζεται αναπαραστάσεις και έννοιες, προκειμένου να κατασκευάσει τα δικά του νοήματα (εννοιολογική αλλαγή). Να προχωρήσει πέρα από την κατανόηση έτοιμων και αφηρημένων πληροφοριών και να οικοδομήσει τα δικά του γνωστικά σχήματα (Σολομωνίδου, 2006).
- **Διάλογος-συνεργασία.** Οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν να αποτελέσουν αφορμή για εστιασμένο διάλογο, μέσα στα πλαίσια της συνεργατικής διδασκαλίας. Ιδιαίτερα, όταν πρόκειται για δραστηριότητες δημιουργίας και έκφρασης, που απαιτούν επικοινωνία για την εκπόνηση κάποιου κειμένου ή project. Ενισχύεται η συλλογική συμπεριφορά, μαθαίνοντας πώς να δρουν, να συνεισφέρουν και να αυτοπροσδιορίζονται μέσα σε μαθητικές ομάδες (Ματσαγγούρας, 2008).
- **Αναπαράσταση.** Τα ψηφιακά εργαλεία περιέχουν πολυποίκιλες αναπαραστάσεις εννοιών και πληροφοριών, που προσομοιάζουν με τα αντίστοιχα φαινόμενα. Η άμεση ανταπόκρισή τους στις ενέργειες του μαθητή και η αλληλεπίδραση του με τις έννοιες δίνουν τη δυνατότητα στον μαθητή να συσχετίζει άμεσα τις αναπαραστάσεις με τις έννοιες που αναπαριστούν. Ο τυπικός μαθηματικός συμβολισμός ως μέσο αναπαράστασης εννοιών και ιδιοτήτων, εμφανίζεται για τους μαθητές ως αυθαίρετος και δημιουργεί παρανοήσεις, με αποτέλεσμα να περιορίζονται στην αποστήθιση των λύσεων και των κανόνων, χωρίς να κατανοούν τις έννοιες. Αντίθετα, ο δυναμικός χαρακτήρας της τεχνολογίας δίνει τη δυνατότητα μετασχηματισμού του τρόπου

χρήσης των εννοιών και προσφέρει διαδραστική και δυναμική υποστήριξη της μαθησιακής διαδικασίας (Κυνηγός, 2011).

Ως εκ τούτου, η αξιοποίηση των ΤΠΕ στη διδακτική διαδικασία, σε σχέση με τα παραδοσιακά διδακτικά μέσα, είναι δυνατό να συμβάλλει στη διεύρυνση της αντίληψης και της εμπειρίας των μαθητριών/τών, καθώς οπτικοποιεί αποτελεσματικά και αισθητοποιεί τη διδασκαλία, ενώ ταυτόχρονα απαλλάσσει τους μαθητές από πολύπλοκους υπολογισμούς. Ταυτόχρονα, εξασφαλίζει την πρόσβαση των εκπαιδευτικών και των μαθητριών/τών σε ένα πλούσιο πληροφοριακό υλικό, διευρύνει τη συμμετοχή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία και τη διευκολύνει, διαφοροποιεί τη διδασκαλία, καθώς και εξυπηρετεί την επικοινωνία όσων συμμετέχουν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Μέσω της χρήσης των ΤΠΕ, οι μαθήτριες/τές δεν αναλαμβάνουν τον ρόλο των παθητικών αποδεκτών του περιεχομένου της μάθησης, αλλά είναι σε θέση δρώντας με αυτενέργεια, να αξιολογούν τις πληροφορίες που προσλαμβάνουν, να αλλάζουν και να παρεμβαίνουν στη μαθησιακή διαδικασία με τις ιδέες τους (Τζεκάκη, 2001).

Ο εποικοδομισμός είναι η θεωρία που υποστηρίζει με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο την εκπαιδευτική χρήση των νέων τεχνολογιών, καθώς ο μαθητής χτίζει τη γνώση μέσα από την αυτενέργεια και την ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος και αποκτά γνώση που συνδέεται με τον κοινωνικό χαρακτήρα της μάθησης, όχι παθητική γνώση, αλλά που μπορεί να εφαρμοστεί σε πραγματικές συνθήκες (Καφούση & Ντζιαχρήστος, 2000). Η τεχνολογία γίνεται το μέσο που μπορεί να στηρίζει τη μάθηση με νόημα και δράση. Η μαθησιακή διαδικασία στηρίζεται στην ενεργητική, δημιουργική συμμετοχή, την ανακάλυψη, τη διερεύνηση των μαθητριών/τών με βάση τα προσωπικά τους ενδιαφέροντα, με την καθοδήγηση που προσφέρει ο εκπαιδευτικός, ο οποίος διευκολύνει τον μαθητή να προχωρήσει από τα γνωστά στοιχεία που έχουν εμπεδωθεί στα νέα που χρειάζεται να εμπεδωθούν (Αλιβίζος & Βρατσάλης, 2014).

Ο δε εκπαιδευτικός οφείλει να διαδραματίζει ρόλο που διευκολύνει τους μαθητές και να διαμορφώνει γι' αυτούς ένα τέτοιο μαθησιακό πλαίσιο, ώστε να μπορούν, με την υποστήριξη και την ενθάρρυνσή του, να αναπτύξουν πρωτοβουλίες ενασχόλησης με θέματα που σχετίζονται με τις γνωστικές τους ανάγκες και που εξελίσσουν τις νοητικές τους δομές και τα γνωστικά τους σχήματα. Ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει ρόλο διαμεσολαβητή και συνοδού (Αλιβίζος & Βρατσάλης, 2014). Το έργο, η αρμοδιότητα και οι γνώσεις του σχετίζονται με τους γνωστικούς ορίζοντες που μπορεί να διανοίξει στους μαθητές. Επομένως, ο ρόλος του εκπαιδευτικού αλλάζει και εμπλουτίζεται. Παύει να μεταφέρει τη γνώση, να ορίζει εργασίες, να εξετάζει και να αξιολογεί. Δεν υποβαθμίζεται ο ρόλος του,

γίνεται αντίθετα πιο απαιτητικός και πιο σύνθετος, καθώς γίνεται ο εκπαιδευτικός, ταυτόχρονα, καθοδηγητής, σύμβουλος, εμπυχωτής, παρατηρητής και συντονιστής (Λαφατζή, 2005).

Αποτελεί, κατά κάποιο τρόπο, τη «σκαλωσιά», καθώς διαμεσολαβεί μεταξύ της ψηφιακής ικανότητας που έχουν αποκτήσει οι μαθητές πρακτικά και βιωματικά και των μορφωτικών στόχων, που μπορούν να επιτευχθούν και με τη χρήση νέων μέσων και τεχνολογιών. Επιπρόσθετα, ο εκπαιδευτικός εξασφαλίζει τις εκπαιδευτικές συνθήκες, ώστε να αναπτύξουν οι μαθητές συνεργατικές δεξιότητες και δημιουργικότητα κατά την εργασία τους, καθώς στο πλαίσιο ενός εκπαιδευτικού περιβάλλοντος, όπου κυριαρχούν οι ΤΠΕ, έχουν τη δυνατότητα οι νέοι άνθρωποι να επιτύχουν την ανάπτυξη των δεξιοτήτων που τους είναι απαραίτητες για την αποτελεσματική συμμετοχή τους στις σύγχρονες κοινωνίες της πληροφορίας (Reigeluth, 1999).

Όσον αφορά τον ρόλο του μαθητή, αυτός ενδυναμώνεται εφόσον οι μαθητές συμμετέχουν πολύ πιο ενεργά στη διαδικασία της μάθησης απ' ό,τι συμβαίνει με την παράδοση του μαθήματος με τη μορφή διάλεξης. Με τη χρήση των υπολογιστών, οι μαθητές γίνονται περισσότερο υπεύθυνοι για τη δική τους μάθηση, καθώς μαθαίνουν να ελέγχουν τη σκέψη τους και να εργάζονται σε ένα μαθητοκεντρικό περιβάλλον με τους δικούς τους ρυθμούς. Αναπτύσσουν κριτική ικανότητα απέναντι στις πληροφορίες, ώστε να μπορούν να τις επιλέγουν, να τις συνδέουν, να τις συγκρίνουν και να τις χρησιμοποιούν, σύμφωνα με τις μαθησιακές τους ανάγκες (Χρονάκη, 2004).

Έτσι, μετατρέπονται σε δυναμικούς δημιουργούς της δικής τους γνώσης, αφήνοντας πίσω τον παθητικό μαθησιακό τους χαρακτήρα. Δεν παρατηρούν απλώς τον διδάσκοντα. Μαθαίνουν να επιλύουν σύνθετα προβλήματα, παρά να απομνημονεύουν στείρες γνώσεις. Εξετάζουν τα θέματα από πολλές σκοπιές καλλιεργώντας την κριτική τους σκέψη. Θέτουν ερωτήματα και προβληματισμούς και αναζητούν απαντήσεις έχοντας πρόσβαση σε πολυάριθμες πηγές και υλικό. Έχουν τη δυνατότητα να εργάζονται ως μέλη μιας ομάδας σε συλλογικές εργασίες αναπτύσσοντας συνεργατικές και επικοινωνιακές δεξιότητες και στάσεις (Λαφατζή, 2005· Ματσαγγούρας, 2008).

Δεν υπονοείται, βέβαια, σε καμία περίπτωση ότι πρέπει να εγκαταλειφθούν προ-τεχνολογικά εργαλεία, όπως το μολύβι και το χαρτί, ο πίνακας, ο γνώμονας και ο διαβήτης και να χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά τα μέσα που παρέχουν οι νέες τεχνολογίες. Η τεχνολογία δίνει εναλλακτικούς τρόπους έκφρασης σε μαθητές και εκπαιδευτικούς και πάντα το σκίτσο σε χαρτί και μολύβι, σε πίνακα και μαρκαδόρο θα είναι χρήσιμο και εύχρηστο.

2. Μεθοδολογία

2.1. Ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να αξιολογηθεί η χρησιμότητα του μαθηματικού λογισμικού GeoGebra στην πράξη, ως εργαλείο για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα έρευνα αφορούν στο πώς συζητούν για τα κλάσματα κι αλληλεπιδρούν με το ψηφιακό εργαλείο οι μαθήτριες/τές, αν προωθείται και υποστηρίζεται η συνεργασία των παιδιών κατά τη μαθησιακή διαδικασία καθώς και στον ρόλο της εκπαιδευτικού κατά την υλοποίηση και εφαρμογή του ψηφιακού προγράμματος Geogebra, για τη διδασκαλία των κλασμάτων στην Ε΄ τάξη του δημοτικού:

- Πώς μιλούν οι μαθήτριες/τές για το πρόγραμμα και τα χαρακτηριστικά του; Πώς μιλούν για τα κλάσματα και τα Μαθηματικά μέσα από τη χρήση του προγράμματος;
- Πώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους οι μαθήτριες/τές κατά τη μαθησιακή πράξη και την ενασχόλησή τους με το ψηφιακό εργαλείο; Υποστηρίζεται η συνεργασία των παιδιών και η ομαδική εργασία από τη χρήση του προγράμματος αυτού;
- Πώς λειτουργεί ή διαμεσολαβεί ο εκπαιδευτικός στη διαδικασία μάθησης με τη χρήση του Η/Υ και ποιος είναι ο ρόλος του; Το ψηφιακό πρόγραμμα Geogebra υποστηρίζει τον διδακτικό του ρόλο;

2.2. Η επιλογή της μεθόδου

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης και εμπίπτει στο θεωρητικό πλαίσιο της ποιοτικής προσέγγισης, καθώς είναι η μέθοδος που δίνει τη δυνατότητα να διερευνηθούν σε βάθος τα ερωτήματα που τέθηκαν παραπάνω, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στα νοήματα και τις αναπαραστάσεις που αποδίδουν τα υποκείμενα σε κοινωνικά ζητήματα (Creswell, 2011). Η έννοια της ποιοτικής έρευνας περιλαμβάνει μια μορφή διερεύνησης, η οποία περιλαμβάνει την περιγραφή, την ερμηνεία και την κατανόηση του υπό διερεύνηση φαινομένου (Ιωσηφίδης, 2008· Μακρή, 2008).

Επιπλέον, η εφαρμογή της έχει ως στόχο μια πλαισιοθετημένη δραστηριότητα που συμβαίνει σε ένα φυσικό περιβάλλον, το οποίο επιτρέπει στον ερευνητή να διεισδύσει σε λεπτομέρειες λόγω της ενεργής εμπλοκής του σε πραγματικές εμπειρίες (Creswell, 2011). Μέσω της ποιοτικής έρευνας επιχειρείται η διερεύνηση του κοινωνικού κόσμου από την οπτική της εμπειρίας των υποκειμένων, των συμμετεχόντων της έρευνας (Μακρή, 2008). Η ποιοτική μεθοδολογία χρησιμοποιεί, κυρίως, λεκτικά και παραστατικά δεδομένα, όπως είναι

οι παρατηρήσεις, οι συνεντεύξεις και οι αφηγήσεις, ενώ η ποσοτική έρευνα αξιοποιεί, κυρίως, αριθμητικά δεδομένα (Ισαρη & Πουρκός, 2015).

Σύμφωνα με τον Creswell (2011), στη μελέτη περίπτωσης ο ερευνητής εξετάζει σε βάθος ένα πρόγραμμα, ένα συμβάν, μια δραστηριότητα, μια διαδικασία, ένα ή περισσότερα άτομα. Το περιβάλλον μιας μελέτης περίπτωσης είναι μοναδικό και δυναμικό. Έτσι, μέσα από τις μελέτες περίπτωσης ερευνώνται και αποτυπώνονται περίπλοκες αλληλεπιδράσεις γεγονότων, ανθρώπινων σχέσεων και άλλων παραμέτρων σε μια μοναδική περίπτωση. Οι μελέτες περίπτωσης ξεκινούν μέσα σε έναν κόσμο δράσης και συνεισφέρουν σε αυτόν (Cohen, Manion & Morrison, 2008). Στις μελέτες περίπτωσης, η παραμονή του ερευνητή δίπλα στην ερευνώμενη ομάδα για μεγάλο χρονικό διάστημα συντελεί στην ανάπτυξη ενός περιβάλλοντος εμπιστοσύνης μεταξύ συμμετεχόντων στην έρευνα και ερευνητή, το οποίο ευνοεί την αυθόρμητη έκφραση, με αποτέλεσμα τη συλλογή, ίσως, πιο έγκυρων στοιχείων. Ωστόσο, σε τέτοιες περιπτώσεις ανακύπτουν ζητήματα αντικειμενικότητας και ουδετερότητας του παρατηρητή (Νόβα-Καλτσούνη, 2006).

Επομένως, οδηγηθήκαμε στη συγκεκριμένη ερευνητική μέθοδο, ώστε να γίνει πιο λεπτομερής και πιο αποτελεσματική διερεύνηση του σκοπού της παρούσας μελέτης, ο οποίος αφορά την υλοποίηση, εφαρμογή και αξιολόγηση του ψηφιακού λογισμικού Geogebra για τη διδασκαλία των κλασμάτων σε μαθήτριες/τές της Ε΄ τάξης δημοτικού. Το υπό μελέτη θέμα απαιτούσε τη βαθύτερη κατανόηση όλων των στοιχείων και των παραμέτρων που επηρεάζουν και συνδιαμορφώνουν τη μαθησιακή πράξη με χρήση ενός ψηφιακού λογισμικού για τη διδακτική των Μαθηματικών και δεν μπορούσε να αποδοθεί απλώς με ποσοτικά στοιχεία.

Μας δόθηκε η δυνατότητα να προσεγγίσουμε άμεσα τις απόψεις, τις εντυπώσεις και τα σχόλια των παιδιών, εξασφαλίζοντας την πολύπλευρη εξέταση του θέματος, για τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά παρακολουθούν, κατανοούν και οικοδομούν τα δικά τους νοήματα και γνωστικά σχήματα, μέσα σε ένα μαθησιακό πλαίσιο που διαφέρει από το παραδοσιακό και βασίζεται στις νέες τεχνολογίες. Η ημι-δομημένη συνέντευξη, όπως διαμορφώθηκε σε συσχέτιση με την ποιοτική προσέγγιση, επέτρεψε στους συμμετέχοντες να εκφράσουν ελεύθερα και ανεπηρέαστα τις δικές τους αντιδράσεις, σκέψεις, επιθυμίες, στάσεις και τα συναισθήματά τους για το υπό εξέταση θέμα (Cohen, Manion & Morrison, 2008· Creswell, 2011). Όλα τα παραπάνω μαρτυρούν ότι η ποιοτική προσέγγιση αποτελεί την πιο κατάλληλη ερευνητική μέθοδο για την παρούσα μελέτη.

2.3. Αφετηρία-Συμμετέχοντες

Αφετηρία της παρούσας έρευνας αποτέλεσε το προσωπικό ενδιαφέρον της γράφουσας για τη δυναμική και παιδαγωγική αξιοποίηση των Ψηφιακών Τεχνολογιών στο πεδίο των Μαθηματικών και συγκεκριμένα των κλασμάτων, που αποτελούν στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος της Ε΄ δημοτικού. Διατηρώντας την πεποίθηση ότι οφείλουμε να παρέχουμε ευκαιρίες ανάδειξης των δυνατοτήτων που παρέχουν ως υποστηρικτικά εργαλεία της μάθησης οι Νέες Τεχνολογίες, παρά τις αντικειμενικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουμε στην καθημερινή διδακτική πράξη, σχεδιάσαμε και υλοποιήσαμε τη συγκεκριμένη έρευνα, προσδοκώντας να αποτελέσει μια χρήσιμη εμπειρία, η οποία θα αξιοποιηθεί στο μέλλον προς όφελος του συνόλου των παιδιών της τάξης. Όπως αναφέρουν οι Cobb, Wood και Yackel (1991), η έρευνα μέσα στην τάξη με στόχο τη διερεύνηση νέων μορφών διδασκαλίας των Μαθηματικών, αποτελεί βασική προϋπόθεση για την εξέλιξη και την περαιτέρω βελτίωση του διδακτικού πλαισίου και της μάθησης των Μαθηματικών στα σχολεία.

Όπως, ήδη, αναφέρθηκε, το ερευνητικό υλικό στην ποιοτική έρευνα προέρχεται από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων που κατέχει την πρωταρχική θέση ως πηγή πολλαπλών πληροφοριών. Ως συνέπεια, ο αριθμός των ατόμων που συμμετέχουν είναι σχετικά μικρός, προκειμένου να μπορέσει ο ερευνητής να εμβαθύνει στις πολλαπλές συσχετίσεις και να συνδυάσει τις διαφορετικές απόψεις, αξίες, επιθυμίες και στάσεις που εξωτερικεύονται (Creswell, 2011).

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε στο 144^ο Δημοτικό Σχολείο Αθηνών με συμμετέχουσες/χοντες 10 άτομα, 8 μαθήτριες και 2 μαθητές της Ε΄ τάξης που αποτέλεσαν την ομάδα εστίασης (focus group). Κατά τον σχεδιασμό της ομάδας εστίασης, ο στόχος της ερευνήτριας, η οποία αποτελεί και εκπαιδευτικό του τμήματος της Ε΄ τάξης όπου φοιτούν οι συμμετέχοντες στην έρευνα, ήταν να δημιουργηθεί μια λειτουργική ομάδα, τα μέλη της οποίας θα είχαν τη δυνατότητα να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους και να διεξάγουν εποικοδομητικές συζητήσεις, με αποτέλεσμα την παραγωγή χρήσιμου ερευνητικού υλικού. Γνωρίζοντας η ερευνήτρια, εκ των προτέρων, το προφίλ της κάθε μαθήτριας και του κάθε μαθητή, ως εκπαιδευτικός του συγκεκριμένου τμήματος, έθεσε ως βασικό κριτήριο για την επιλογή των συμμετεχόντων, να είναι ενεργοί, να υπάρχει αλληλεπίδραση και δυναμική μεταξύ τους και να αισθάνονται άνετα να συζητούν σχετικά με τα θέματα τα οποία αφορούν την έρευνα (Morgan, 1998).

2.4. Μέθοδος και εργαλεία συλλογής δεδομένων

Για τη διεξαγωγή της έρευνας, έγιναν πέντε συναντήσεις στην αίθουσα Πληροφορικής, όπου οι μαθήτριες/τές συμμετείχαν σε δραστηριότητες με θέμα τα κλάσματα, με τη χρήση του ψηφιακού λογισμικού Geogebra. Στο πλαίσιο των συναντήσεων αυτών, πραγματοποιήθηκαν ομαδικές συνεντεύξεις, οι οποίες αποτελούνταν από ημι-δομημένες συνεντεύξεις που περιελάμβαναν ανοιχτού τύπου ερωτήσεις. Ωστόσο, εκτός από τις ομαδικές, πραγματοποιήθηκαν και ατομικές συνεντεύξεις με μία εκ των μαθητριών και τους δύο μαθητές της ομάδας εστίασης.

Ως μέθοδος συλλογής των δεδομένων μας, οι ημιδομημένες συνεντεύξεις συνδυάστηκαν με την παρατήρηση, διότι αποτελεί μέθοδο που επιτρέπει στον ερευνητή να συγκεντρώσει δεδομένα μέσα από πραγματικές καταστάσεις και να δει στοιχεία που σε διαφορετική περίπτωση θα διέφευγαν της προσοχής του (Verma & Mallick, 2004· Χρονάκη, 2010). Στην προκειμένη περίπτωση, επιθυμία μας αποτελούσε η καταγραφή των αντιδράσεων των μαθητών, όταν προσπαθήσουν μόνοι τους να χρησιμοποιήσουν το πρόγραμμα και χωρίς εξωτερική βοήθεια και καθοδήγηση. Ταυτόχρονα, καθώς τα παιδιά θα μιλούσαν κατά τη διάρκεια της χρήσης της εφαρμογής, θα εντοπίζονταν κάποιες από τις σκέψεις και τις παρατηρήσεις τους.

Μέσα από τις ανοιχτού τύπου ερωτήσεις και την επιλογή της ημι-δομημένης συνέντευξης, οι μαθητές μπορούσαν να αναπτύξουν απρόσκοπτα και χωρίς περιορισμό τις απόψεις τους και να εκθέσουν τις προσωπικές τους αφηγήσεις και τις διαφορετικές τους προσεγγίσεις. Αυτό έδωσε τη δυνατότητα στην ερευνήτρια να εξασφαλίσει την καλύτερη συνεργασία κι επαφή με τους ερωτώμενους, χωρίς εμπόδια και άγχος και αποκομίσει πλούσιο ερευνητικό υλικό, που επιτρέπει την εμβάθυνση για το υπό εξέταση θέμα (Robson, 2010).

Οι ομαδικές συνεντεύξεις είναι μια μορφή ομαδικής συζήτησης, στην οποία οι συμμετέχοντες έχουν τη δυνατότητα να ανταλλάξουν απόψεις και εκτιμήσεις σχετικά με το συγκεκριμένο θέμα, αλληλεπιδρώντας τόσο με τον ερευνητή όσο και μεταξύ τους ως μέλη μιας ομάδας με κοινά χαρακτηριστικά και στόχους (Wilkinson, 1998). Η ομάδα εστίασης αποτελείται από μαθήτριες/τές του ίδιου τμήματος, ώστε να διευκολυνθεί η επικοινωνία και η ανταλλαγή σκέψεων, εμπειριών και συναισθημάτων μέσα σε κλίμα ασφάλειας και εμπιστοσύνης μεταξύ τους.

Η επιλογή διεξαγωγής ομαδικών συζητήσεων στην ομάδα εστίασης και ατομικών συνεντεύξεων έγινε ώστε να διασταυρωθούν τα ερευνητικά αποτελέσματα, αλλά και να εκμεταλλευτούμε τα πλεονεκτήματα που προσφέρουν και οι δύο τεχνικές.

2.5. Οδηγός Συνέντευξης

Ο συνδυασμός της θεωρητικής ανασκόπησης με τα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης, οδήγησε στη διαμόρφωση του οδηγού συνέντευξης, που περιελάμβανε τρεις θεματικούς άξονες. Ο πρώτος άξονας περιελάμβανε ερωτήσεις σχετικές με τις εντυπώσεις που δημιουργήθηκαν στους μαθητές μέσα από την αλληλεπίδραση τους με το ψηφιακό πρόγραμμα Geogebra με σκοπό την εκμάθηση των κλασμάτων. Ο δεύτερος άξονας περιείχε ερωτήσεις που αναδεικνύουν την προώθηση της συνεργασίας και της ομαδικής εργασίας των παιδιών μέσα από την υλοποίηση του ψηφιακού προγράμματος. Ο τρίτος άξονας περιελάμβανε ερωτήσεις σχετικές με τον ρόλο του εκπαιδευτικού ως διαμεσολαβητής για την επίτευξη της μάθησης, με την εφαρμογή και υλοποίηση του συγκεκριμένου ψηφιακού προγράμματος για τη διδασκαλία των κλασμάτων.

Οι θεματικοί άξονες συνδέονται άμεσα με τα ερευνητικά μας ερωτήματα, αφού ο πρώτος αντιστοιχεί στο πώς συζητούν για τα κλάσματα οι μαθήτριες/τές μέσα από την εφαρμογή του ψηφιακού εργαλείου, ο δεύτερος στο πώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους οι μαθήτριες/τές κατά τη μαθησιακή πράξη και την ενασχόλησή τους με το ψηφιακό εργαλείο και αν υποστηρίζεται η συνεργασία των παιδιών και η ομαδική εργασία από τη χρήση του προγράμματος αυτού και ο τρίτος άξονας αντιστοιχεί στο πώς λειτουργεί ή διαμεσολαβεί ο εκπαιδευτικός στη διαδικασία μάθησης με τη χρήση του H/Y, ποιος είναι ο ρόλος του και αν το ψηφιακό πρόγραμμα Geogebra υποστηρίζει τον διδακτικό του ρόλο.

Οι ερωτήσεις των τριών θεματικών αξόνων ήταν έτσι διαμορφωμένες ώστε να μας βοηθήσουν να διερευνήσουμε αν το συγκεκριμένο ψηφιακό πρόγραμμα και κατ' επέκταση οι νέες τεχνολογίες εμπλουτίζουν δημιουργικά και αποτελεσματικά τη μαθησιακή πράξη, και αν υποστηρίζουν τη διδασκαλία και το διδακτικό έργο ώστε να αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο και μέσο. Εν κατακλείδι, ο σκοπός της έρευνας είναι να διερευνήσουμε τη σχέση ανάμεσα στις νέες τεχνολογίες από τη μια και τη μαθησιακή διαδικασία και τη διδακτική πράξη από την άλλη.

Οι ανοιχτού τύπου ερωτήσεις που τέθηκαν στην ημι-δομημένη συνέντευξη, επέτρεψαν στους αποκρινόμενους να λειτουργήσουν απρόσκοπτα και χωρίς πίεση στις απαντήσεις και τα σχόλιά τους. Συμπεριλήφθηκαν ερωτήσεις με στόχο να διατυπωθούν

γνώμες και απόψεις, ερωτήσεις παρώθησης που αναζητούσαν διαφορετικές πιθανές απαντήσεις, υποθετικές ερωτήσεις και ερωτήσεις επιθυμίας, ώστε ο αποκρινόμενος να εκφράσει μελλοντικά σχέδια και πλάνα που θα μπορούσαν να επηρεάσουν θετικά το διδακτικό πλαίσιο. Η διατύπωση των ερωτήσεων βασίστηκε στον απλό, καθημερινό λόγο, ώστε να αντιστοιχεί με την ηλικία των συμμετεχόντων.

Το έναυσμα για την πραγματοποίηση των συνεντεύξεων αποτέλεσε η προβολή και η διδακτική χρήση και αξιοποίηση του ψηφιακού προγράμματος Geogebra στο μάθημα για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Μέσα στο πλαίσιο του διδακτικού δίωρου, αφού έγινε παρουσίαση του προγράμματος και των δυνατοτήτων του από την ερευνήτρια, οι μαθήτριες/τές είχαν την ευκαιρία να εμπλακούν και αλληλεπιδράσουν με τις δραστηριότητες, που σε πρότερο χρόνο είχαν επιλεγεί από την εκπαιδευτικό και ερευνήτρια. Οι δραστηριότητες και τα φύλλα εργασίας που επιλέχθηκαν, αναφέρονταν:

- ✓ στην έννοια του κλάσματος,
- ✓ στη σύγκριση των κλασμάτων,
- ✓ στα καταχρηστικά κλάσματα και τους μεικτούς αριθμούς,
- ✓ στα ισοδύναμα κλάσματα.

2.6. Πλαίσιο και Σχεδιασμός

Η πορεία της ερευνητικής μας διαδικασίας για τη συγκέντρωση του ερευνητικού υλικού ακολούθησε τα παρακάτω βήματα.

Το πρώτο μέλημα ήταν να ενημερώσουμε τον Διευθυντή του δημοτικού σχολείου σχετικά με τον χαρακτήρα, τον σκοπό και τη διαδικασία της έρευνάς μας. Δόθηκε διαβεβαίωση στον Διευθυντή του σχολείου ότι θα τηρηθεί απόλυτα η ανωνυμία των συμμετεχόντων και του σχολείου και ότι θα διασφαλιστεί ο εμπιστευτικός χαρακτήρας της έρευνάς μας και όλες οι προϋποθέσεις της ερευνητικής δεοντολογίας. Στη συνέχεια, ενημερώσαμε δια ζώσης τους γονείς και κηδεμόνες των μαθητριών/τών. Η ενημέρωση των γονέων έγινε με κάθε λεπτομέρεια για τον σκοπό και τους όρους που διέπουν την έρευνά μας, τονίζοντας ότι θα διατηρηθεί η ανωνυμία των συμμετεχόντων. Έπειτα δόθηκαν προς υπογραφή τα εγκριτικά σημειώματα,⁴ με τα οποία έδιναν τη συγκατάθεσή τους για τη συμμετοχή των παιδιών στην έρευνα και τη μαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων. Τηρήθηκαν οι αρχές της συνειδητής συναίνεσης όλων των συμμετεχόντων, της ανωνυμίας και της εμπιστευτικότητας.

⁴Βλ. Παράρτημα Α

Η ερευνητική διαδικασία διήρκησε από τις 17 Δεκεμβρίου 2019 έως τις 27 Φεβρουαρίου 2020. Μέσα στο πλαίσιο αυτής έγιναν πέντε συναντήσεις με τους συμμετέχοντες στην αίθουσα Πληροφορικής του σχολείου, στην οποία δεν πραγματοποιούνταν μαθήματα τις ώρες που επιλέξαμε να γίνουν οι συναντήσεις. Η κάθε συνάντηση στην αίθουσα Πληροφορικής είχε διάρκεια ενενήντα λεπτά, δηλαδή ένα διδακτικό δίωρο. Το κάθε διδακτικό δίωρο της έρευνάς μας αποτελούνταν από δύο μέρη:

1. Στο πρώτο μέρος του δίωρου πραγματοποιήθηκε μάθημα με τη χρήση και την υποστήριξη του μαθηματικού ψηφιακού προγράμματος GeoGebra, προβολή και παρουσίαση αυτού.
2. Στο δεύτερο μέρος πραγματοποιήθηκαν οι ομαδικές συνεντεύξεις.

Στην αρχή της πρώτης συνάντησης, ενημερώθηκαν αναλυτικά οι μαθήτριες/ τές, αφού πρώτα συμφώνησαν και οι ίδιοι για τη συμμετοχή τους και για τον τρόπο διεξαγωγής της συνέντευξης. Επιπρόσθετα, τους εξηγήσαμε τα στάδια που θα ακολουθήσουμε στη συγκεκριμένη διαδικασία.

Αρχικά, μεριμνήσαμε για την επιλογή των κατάλληλων δραστηριοτήτων και φυλλαδίων εργασίας που θα μπορούσαν να ενταχθούν στην έρευνά μας, σύμφωνα με την ηλικία και τη σχολική τάξη που μελετάμε, ώστε να κινητοποιήσουν το ενδιαφέρον των μαθητριών/τών. Η ιδιότητα της ερευνήτριας ως εκπαιδευτικός του δεύτερου τμήματος της Ε΄ τάξης, στο οποίο φοιτούν οι συμμετέχουσες/χοντες, αποτελεί πλεονέκτημα όσον αφορά την επιλογή των κατάλληλων εργασιών, σύμφωνα με τη διδακτική ύλη των κλασμάτων, μέσα στο πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος. Σε κάθε συνάντηση δουλεύαμε διαφορετικό κεφάλαιο των κλασμάτων.

Ως μοντέλο διδασκαλίας, ακολουθήθηκε το ομαδοσυνεργατικό όπου οι μαθήτριες/τές ήταν χωρισμένοι σε τρεις ολιγομελείς ομάδες των δύο ή τριών ατόμων. Η κάθε ομάδα είχε τον δικό της υπολογιστή και είχε την ευκαιρία να γνωρίσει τα κλάσματα μέσα από το ψηφιακό περιβάλλον του GeoGebra, ακολουθώντας τον δικό της τρόπο επίλυσης της κάθε εργασίας. Τα μέλη της είχαν τη δυνατότητα να μοιράσουν ρόλους, να επικοινωνήσουν και να ανταλλάξουν απόψεις. Ωστόσο, φροντίσαμε ώστε όλες οι ομάδες να ακολουθούν έναν συγχρονισμό στη σειρά των εργασιών. Δούλευαν όλες το ίδιο φυλλάδιο εργασίας και όταν μια ομάδα τελείωνε με την εργασία της περίμενε και τις υπόλοιπες να ολοκληρώσουν. Στο δεύτερο μέρος του δίωρου όλοι οι συμμετέχοντες απαντούσαν στις ερωτήσεις που τους γίνονταν, σύμφωνα με την εμπειρία που είχαν βιώσει στο πρώτο μέρος. Όταν ολοκληρώθηκαν οι ομαδικές συναντήσεις, τρεις από τους συμμετέχοντες, ένα κορίτσι

και δύο αγόρια, πήραν μέρος στις ατομικές συνεντεύξεις, όπου μοιράστηκαν τη συνολική εμπειρία που βίωσαν.

Πριν από την έναρξη της κάθε συνέντευξης, συζητούσαμε σχετικά με τη διαδικασία, ώστε οι ερωτώμενοι να γνωρίζουν τι θα επακολουθήσει και να αποβάλλουν το όποιο άγχος τους διακατείχε. Ενημερώσαμε και καθησυχάσαμε τα παιδιά ότι οι απαντήσεις τους δε θα αξιολογηθούν ως σωστές ή λανθασμένες, αλλά θα συμβάλλουν στον σκοπό της μελέτης που διεξάγει η ερευνήτρια. Επιπρόσθετα, τους υπενθυμίζαμε ότι η συζήτησή μας θα μαγνητοφωνείται με τη χρήση δημοσιογραφικού μαγνητόφωνου. Η διατύπωση των ερωτήσεων γινόταν με τρόπο απλό, ευθύ και ξεκάθαρο, χωρίς να υποδεικνύεται ο τρόπος απάντησης. Επιπλέον, ο κάθε μαθητής είχε τον χρόνο που χρειαζόταν, για να σκεφτεί και να εκφραστεί ανεμπόδιστα. Η κάθε συνέντευξη είχε διάρκεια περίπου είκοσι λεπτά, τόσο οι ομαδικές συνεντεύξεις όσο και οι ατομικές.

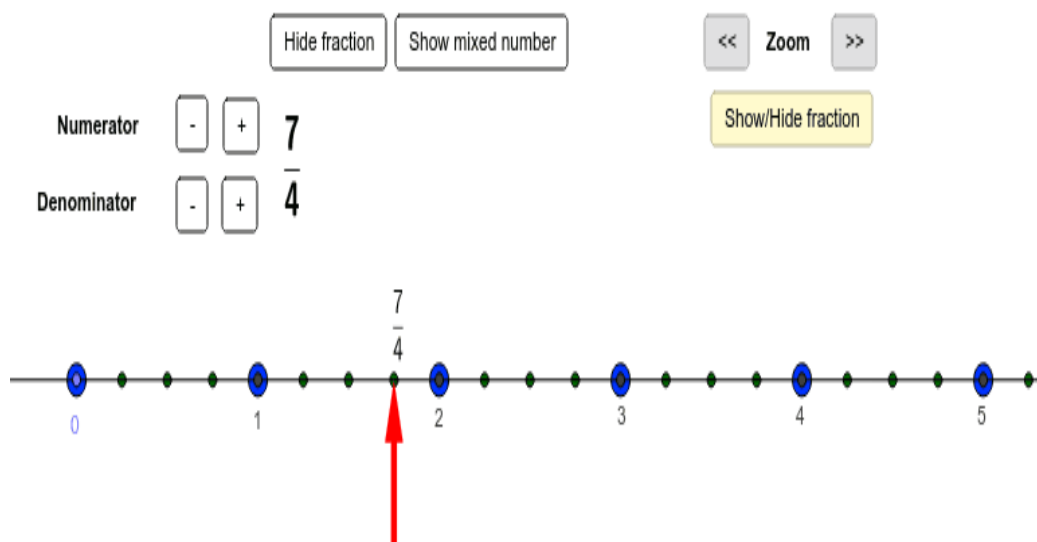
Στην ομάδα εστίασης των μαθητών της Ε΄ τάξης, επισημάναμε ιδιαίτερα τον τρόπο διεξαγωγής της συζήτησης με στόχο να εξασφαλιστεί η ισότιμη συμμετοχή όλων και η ελεύθερη έκφραση των απόψεων, ανεξαρτήτως αν συμφωνούν ή διαφωνούν μεταξύ τους οι συμμετέχοντες. Ο χώρος διεξαγωγής των συνεντεύξεων ήταν η αίθουσα της Πληροφορικής για τις ομαδικές συνεντεύξεις, μετά το πέρας της προβολής και διδακτικής αξιοποίησης του προγράμματος και η αίθουσα της βιβλιοθήκης του σχολείου για τις ατομικές συνεντεύξεις. Η προσπάθειά μας ήταν η επιλογή ενός ήσυχου και κατάλληλα εξοπλισμένου χώρου που να είναι οικείος στα παιδιά και να ευνοεί τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας.

Πρώτη συνάντηση

Κατά τη διάρκεια της πρώτης συνάντησης πραγματοποιήθηκε διεξοδική ενημέρωση των παιδιών για τον σκοπό της έρευνας και ακολούθησαν ερωτήσεις σχετικά με τον τρόπο χρήσης της τεχνολογίας στην καθημερινότητα τους. Στη συνέχεια, ανοίξαμε το λογισμικό GeoGebra και ακολούθησε πειραματισμός των παιδιών και χρήση ορισμένων από τα εφέ που διατίθενται από το λογισμικό καθώς και παρατήρηση των μεταβολών που προκαλούνταν από τις όποιες ενέργειες πραγματοποιούσαν στο ψηφιακό του περιβάλλον. Είχαν την ευκαιρία να μετακινήσουν αντικείμενα, να μεγαλώσουν και να μικρύνουν σχήματα, να επιλέξουν ανάμεσα στα διαθέσιμα μοντέλα και να πειραματιστούν με αυτά. Η πρώτη συνάντηση αποτέλεσε τη γνωριμία των παιδιών με το πρόγραμμα και τη χρήση του.

Αφού έγινε η πρώτη εξοικείωση με το περιβάλλον του λογισμικού, ασχοληθήκαμε με δραστηριότητες σχετικές με την έννοια του κλάσματος. Μέσα από μια ποικιλία δραστηριοτήτων, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να χωρίσουν την αριθμογραμμή σε ίσα

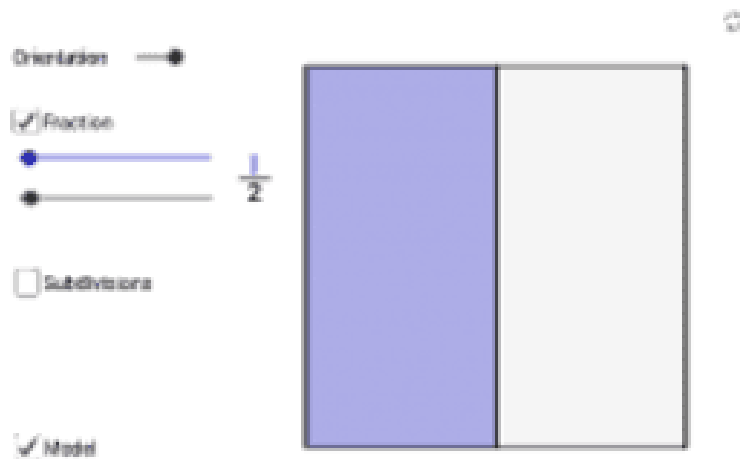
μέρη και να βρουν τις κλασματικές μονάδες και άλλους κλασματικούς αριθμούς (βλ. Εικ. 4), να εντοπίσουν στην αριθμογραμμή τη θέση πολλών διαφορετικών κλασμάτων και να παρατηρούν πώς μεταβάλλεται ο χωρισμός του μοντέλου σε ίσα μέρη απλά με ένα κλικ. Επίσης, να αναγνωρίσουν κλασματικούς αριθμούς και να σχηματίσουν νέα κλάσματα σε μοντέλα επιφάνειας.



Εικόνα 4. Κλάσματα στην αριθμογραμμή

Ήρθαν σε επαφή με ποικιλία σχηματικών αναπαραστάσεων και το μάθημα απέκτησε μια παιγνιώδη μορφή, καθώς κινούνταν με άνεση ανάμεσα στις αριθμογραμμές, τις μπάρες και μια πληθώρα από διάφορα μοντέλα (βλ. Εικ. 5). Επιπρόσθετα, είχαν μοιραστεί φυλλάδια εργασίας, τα οποία αποτελούν τα Πρωτόκολλα⁵ των μαθητών, με τις αντίστοιχες δραστηριότητες του προγράμματος, όπου σημείωναν αρχικά τις απαντήσεις και λύσεις που πρότειναν, αφού συζητούσαν ως ομάδα και στη συνέχεια, μετέφεραν τις απαντήσεις τους στο πρόγραμμα κι ακολουθούσε η διάδραση της ομάδας με το λογισμικό.

⁵Βλ. Παράρτημα Δ

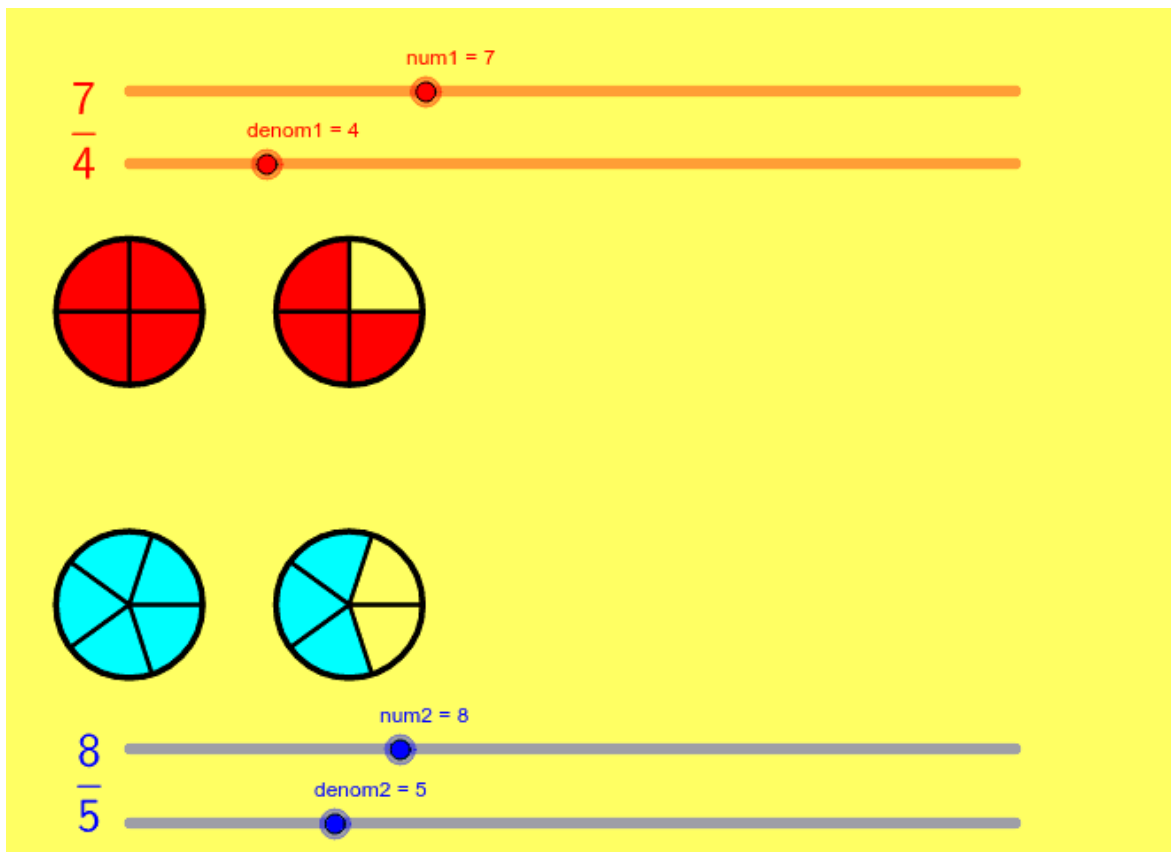


Εικόνα 5. Μοντέλο επιφάνεια

Δεύτερη συνάντηση

Στη δεύτερη συνάντηση, οι μαθητές ασχολήθηκαν με δραστηριότητες σχετικές με τα γνήσια και τα καταχρηστικά κλάσματα. Είναι δύσκολο για τα παιδιά να κατανοήσουν πώς μπορούν να πάρουν δέκα κομμάτια της πίτσας, όταν η πίτσα κόβεται σε έξι μόνο μέρη. Με αυτές τις δραστηριότητες οι μαθήτριες/τές μπόρεσαν να δουν τη σχέση των κλασμάτων των μεγαλύτερων από τη μονάδα με τους μεικτούς αριθμούς.

Είχαν τη δυνατότητα να πειραματίζονται με το μοντέλο μπάρα και το μοντέλο κύκλος και μεταφέροντας τα συρόμενα πλήκτρα να αυξομειώνουν τον αριθμητή και τον παρονομαστή, βλέποντας τη δυναμική επίδραση αυτών των ενεργειών στη μορφή των κλασμάτων (βλ. Εικ. 6).



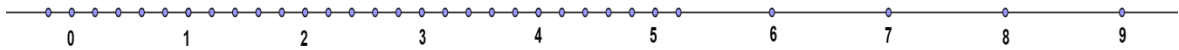
Εικόνα 6. Καταχρηστικά κλάσματα και μεικτοί αριθμοί

Επιπλέον, είχαν την ευκαιρία να τοποθετήσουν γνήσια και καταχρηστικά κλάσματα στην αριθμογραμμή και να παρατηρήσουν τις μεταβολές στον χωρισμό του μοντέλου σε ίσα μέρη, δοκιμάζοντας διάφορα κλάσματα (βλ. Εικ. 7). Μπορούσαν να εντοπίζουν τη θέση των κλασματικών αριθμών και ταυτόχρονα να συγκρίνουν τους αριθμούς με βάση τη θέση στην οποία βρίσκονταν πάνω στην αριθμογραμμή.

Place the blue dot at $\frac{13}{5}$ on the number line. ●

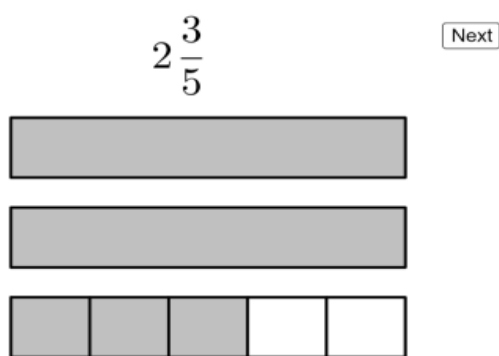
Place the red dot at $2\frac{3}{5}$ on the number line. ●

Am I right?

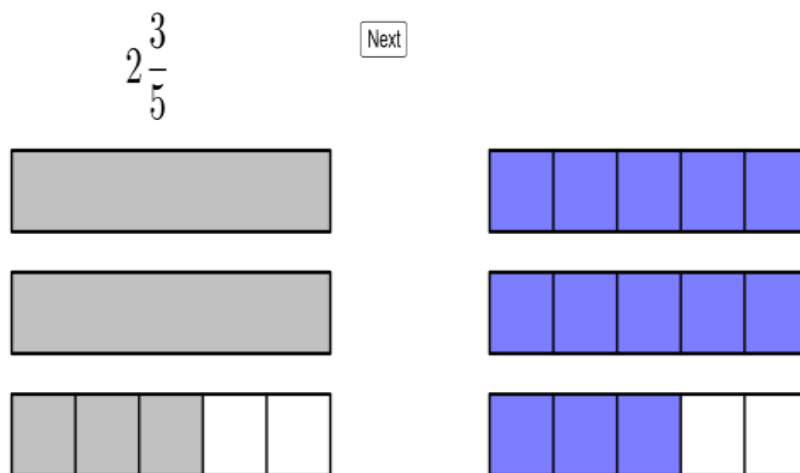


Εικόνα 7. Καταχρηστικά κλάσματα και μεικτοί αριθμοί στην αριθμογραμμή

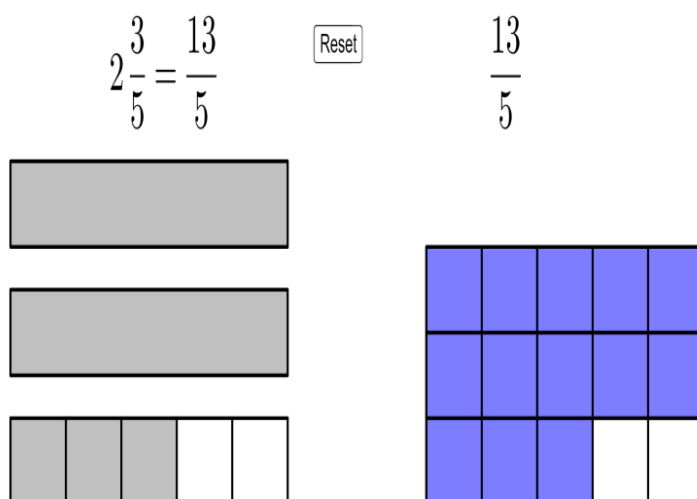
Επιπρόσθετα, μπορούσαν να μετατρέπουν τα καταχρηστικά κλάσματα σε μεικτούς αριθμούς και το αντίστροφο, με τη χρήση μοντέλων που ενώνονται, για να αναδείξουν τα καταχρηστικά κλάσματα και διαμερίζονται, για να αναδείξουν τους μεικτούς αριθμούς (βλ. Εικ. 8, 9, 10). Ο σκοπός αυτών των δραστηριοτήτων ήταν να εξασκηθούν στη διαδικασία μετατροπής των κλασμάτων σε μεικτούς, όχι μόνο μέσα από κανόνες και αλγοριθμικούς τύπους αλλά μέσα από τη χρήση αντικειμένων που συνδέονται με την καθημερινότητά τους.



Εικόνα 8: Αναπαράσταση μεικτού αριθμού



Εικόνα 9: Μετατροπή του μεικτού σε κλάσμα (βήμα 1)

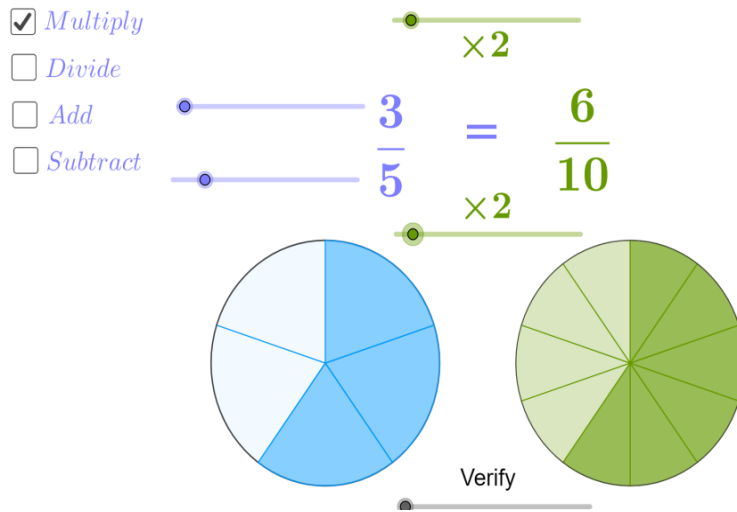


Εικόνα 10. Μετατροπή του μεικτού σε κλάσμα (βήμα 2)

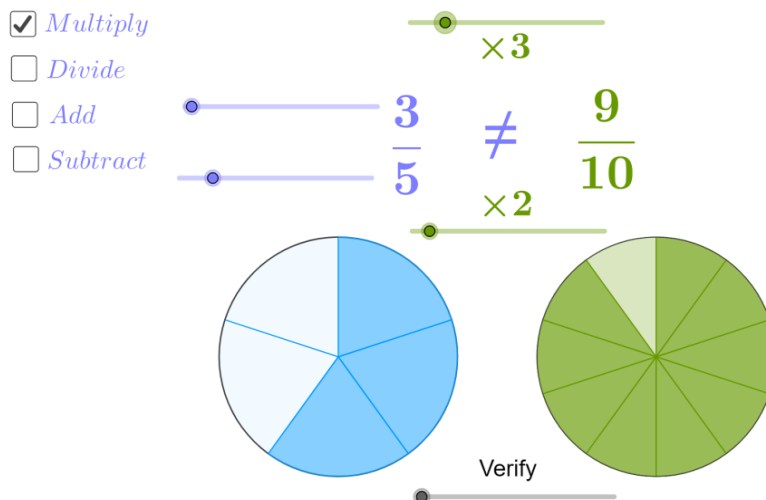
Τρίτη συνάντηση

Στην τρίτη συνάντηση το κυρίαρχο θέμα των δραστηριοτήτων στο ψηφιακό περιβάλλον του GeoGebra ήταν τα ισοδύναμα κλάσματα. Σε μια πρώτη δραστηριότητα, έπρεπε να βρουν τα ισοδύναμα διαφόρων κλασμάτων. Μια εσφαλμένη εντύπωση των παιδιών είναι ότι προσθέτοντας ή αφαιρώντας τον ίδιο αριθμό από τον αριθμητή και τον παρονομαστή, παράγονται ισοδύναμα κλάσματα. Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα αντιμετωπίζεται αυτή η παρανόηση, καθώς πειραματίζονται και δοκιμάζουν πατώντας τα αντίστοιχα πλήκτρα και καταλήγουν να σχηματίσουν ισοδύναμα κλάσματα μόνο πολλαπλασιάζοντας τους κλασματικούς όρους με διάφορους φυσικούς αριθμούς και μεταφέροντας απλά τα αντίστοιχα συρόμενα πλήκτρα (βλ. Εικ. 11, 12). Επιπλέον,

μπορούσαν να διαπιστώσουν ότι δεν προέκυπτε ισοδύναμο κλάσμα, αν πολλαπλασίαζαν μόνο τον αριθμητή ή μόνο τον παρονομαστή.



Εικόνα 11. Σχηματισμός ισοδύναμων κλασμάτων

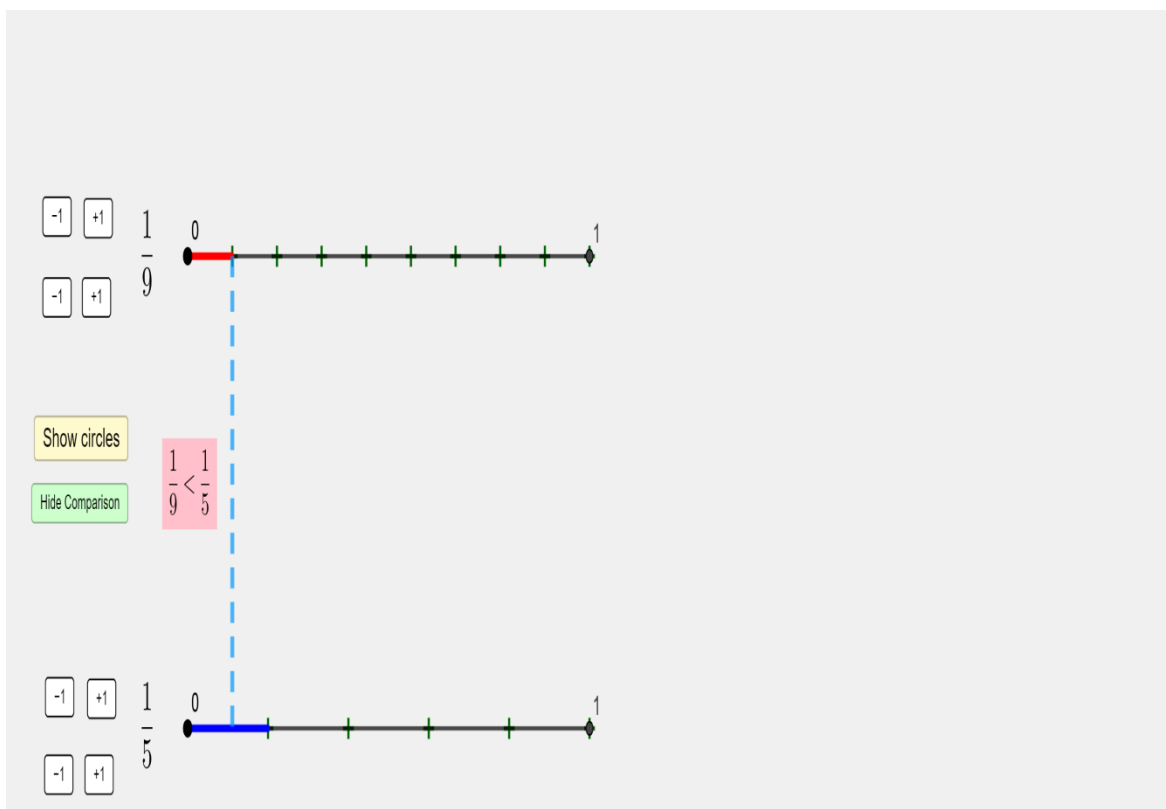


Εικόνα 12. Πειραματισμός με τα κλάσματα

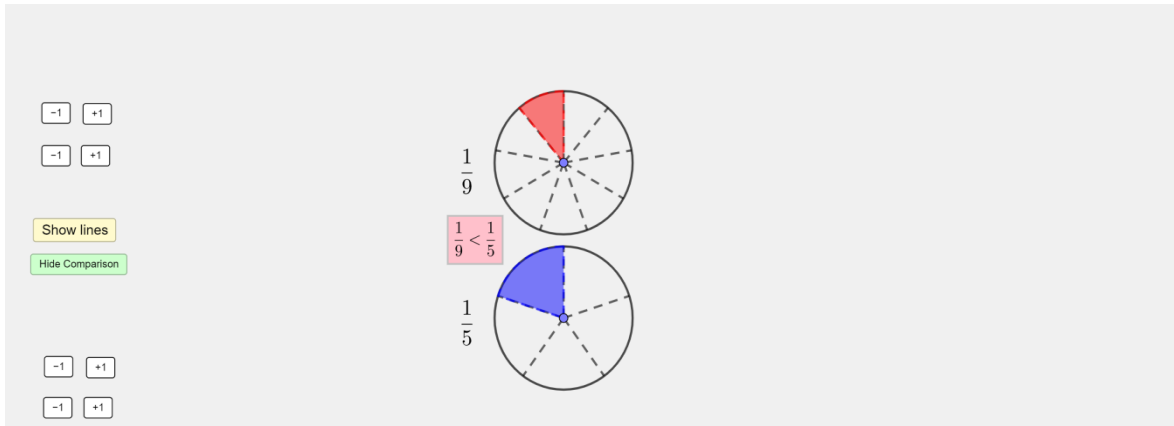
Σε μια δεύτερη δραστηριότητα έπρεπε να βρουν τον όρο που έλειπε, αριθμητή ή παρονομαστή, σε κλάσματα ισοδύναμα. Στο τέλος όλων των δραστηριοτήτων, βέβαια, μπορούσαν να επαληθεύουν την λύση που πρότειναν. Αν το αποτέλεσμα δεν ήταν ορθό, είχαν τη δυνατότητα να αναστοχαστούν ως ομάδα και να ξαναπροσπαθήσουν.

Τέταρτη συνάντηση

Στην τέταρτη συνάντηση οι μαθήτριες/τές ασχολήθηκαν με εργασίες σχετικές με τη σύγκριση των κλασμάτων, οπότε οπτικά σύγκριναν διάφορους τύπους κλασμάτων. Είχαν τη δυνατότητα να συγκρίνουν κλάσματα με ίσους αριθμητές ($1/9$ και $1/5$) και κλάσματα με τους ίδιους παρονομαστές ($1/5$ και $2/5$), πριν προχωρήσουν σε πιο δύσκολες περιπτώσεις σύγκρισης κλασμάτων, με διαφορετικούς και τους δύο όρους τους ($2/5$ και $3/4$). Επιπλέον, δοκίμασαν να συγκρίνουν κλάσματα ισοδύναμα, για να διαπιστώσουν πώς διαφορετικά κλάσματα αντιπροσωπεύονται στην ίδια περιοχή του μοντέλου. Μέσα από αυτές τις δραστηριότητες, ο μαθητής μπορεί να δει τα κλάσματα ταυτόχρονα ως αριθμούς, ως κομμάτια της περιοχής της μονάδας κύκλος και ως σημεία σε μια γραμμή αριθμών (βλ. Εικ. 13, 14).

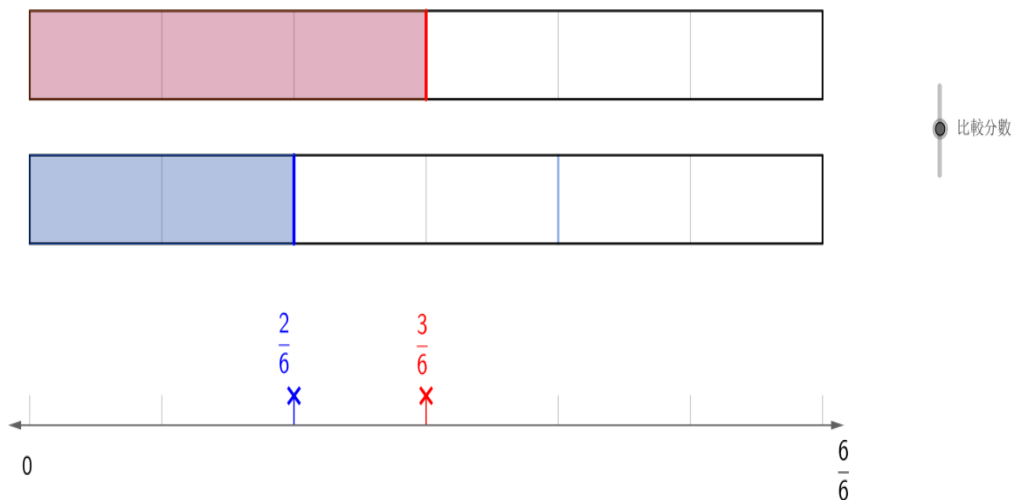


Εικόνα 13. Σύγκριση κλασμάτων με αριθμογραμμή



Εικόνα 14. Σύγκριση κλασμάτων με μοντέλο κύκλος

Στην παρακάτω δραστηριότητα οπτικοποιούνται τα κλάσματα με το μοντέλο μπάρα και τη γραμμή αριθμών (βλ. Εικ. 15). Χρησιμοποιώντας το συρόμενο πλήκτρο, μπορούν να μεταφέρουν τη μια μπάρα μέσα στην άλλη, οπτικοποιώντας με αυτόν τον τρόπο το αποτέλεσμα της σύγκρισης. Και βέβαια, όπως συμβαίνει με όλες τις δραστηριότητες, μπορούν να πειραματιστούν με πολλά κλάσματα, με ένα μόνο κλικ.



Εικόνα 15. Σύγκριση κλασμάτων με μοντέλο μπάρα και αριθμογραμμή

2.7 Πλαίσιο ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων

Αφού ολοκληρώθηκαν οι ομαδικές και οι ατομικές συνεντεύξεις, συνεχίσαμε με την επεξεργασία και την ανάλυση των δεδομένων μας. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν η θεματική ανάλυση, η οποία αποτελεί βασικό εργαλείο για τους ερευνητές που ασχολούνται με την ποιοτική έρευνα, καθώς παρέχει βασικές δεξιότητες χρήσιμες για τη διεξαγωγή των ποιοτικών αναλύσεων (Clarke, Braun & Hayfield, 2015).

Προκειμένου να αναλύσουμε τα ποιοτικά δεδομένα που αποκομίσαμε από τις συνεντεύξεις, δε χρησιμοποιήσαμε κάποιο εξειδικευμένο λογισμικό. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με το χέρι. Η ερευνήτρια άκουσε προσεκτικά κι επανειλημμένα την ομάδα εστίασης και τις ατομικές συνεντεύξεις, προκειμένου να σχηματίσει μια ακριβή εικόνα των λεχθέντων, χωρίς κενά και με κάθε λεπτομέρεια. Κατόπιν, προχώρησε στην απομαγνητοφώνηση⁶, μετασχηματίζοντας σε γραπτό κείμενο τα προφορικά δεδομένα που είχε στη διάθεσή της.

Αφού ολοκληρώθηκε η απομαγνητοφώνηση, οργανώσαμε το ερευνητικό υλικό κωδικοποιώντας το και χωρίζοντάς το σε θεματικές περιοχές, σύμφωνα με τα ερευνητικά μας ερωτήματα. Εντοπίσαμε και απομονώσαμε τα μέρη του υλικού που είχαν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, με βάση τα οποία θα γίνει η διερεύνηση των πεποιθήσεων και των απόψεων των υποκειμένων, μέθοδος που χρησιμοποιείται στις ποιοτικές προσεγγίσεις (Κυριαζή, 1999), όπως είναι και η παρούσα μελέτη.

Η μέθοδος της κατηγοριοποίησης που χρησιμοποιήσαμε, για να ταξινομήσουμε το υλικό μας, μας οδήγησε στον προσδιορισμό των κατηγοριών και υποκατηγοριών που αποτελούν τον θεματικό χάρτη⁷ και είναι σύμφωνες τόσο με τα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε εξ αρχής, όσο και με τη βιβλιογραφική επισκόπηση που προηγήθηκε. Σύμφωνα με τον Βάμβουκα (2007), οι αρχές στις οποίες πρέπει να στηρίζεται η μέθοδος της κατηγοριοποίησης, για να είναι αξιόπιστη και έγκυρη, είναι οι αρχές της αντικειμενικότητας και της καταλληλότητας, οπότε αυτά τα στοιχεία ακολουθήσαμε.

Τέλος, θέλουμε να επισημάνουμε ότι, αφού συμπεριλάβαμε όλα τα τμήματα που είχαν νόημα και συνέβαλαν στην ανάλυση των δεδομένων μας, μετά από ενδελεχή και συστηματική διερεύνηση, δεν υπήρχε κάποιο επιπρόσθετο νέο στοιχείο και πληροφορία που θα μπορούσε να προσδώσει επιπλέον βοήθεια στην παρούσα προσέγγιση, έχοντας φτάσει στο σημείο κορεσμού (Creswell, 2011).

2.8 Σημεία ελέγχου και αξιοπιστίας της έρευνας

Αρχικά, ξεκινήσαμε με μια πιλοτική συνέντευξη, προκειμένου να ελέγξουμε το εργαλείο συλλογής δεδομένων, κατά πόσο, δηλαδή, τα ερωτήματα που τέθηκαν εξ αρχής ήταν αποτελεσματικά και αν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων είχαν δυναμικό χαρακτήρα. Στη

⁶Βλ. Παράρτημα Β

⁷Βλ. Παράρτημα Γ

συνέχεια, προχωρήσαμε σε κάποιες μικρές βελτιώσεις ως προς τον οδηγό συνέντευξης, προσαρμόζοντας κι εμπλουτίζοντας τις αρχικές ερωτήσεις των συνεντεύξεων.

Το γεγονός ότι η ερευνήτρια εργαζόταν ως εκπαιδευτικός στο σχολείο διεξαγωγής της έρευνας, καθώς ήταν η δασκάλα του τμήματος της Ε΄ τάξης όπου φοιτούσαν οι συμμετέχουσες/οντες, βοήθησε στο να δημιουργηθεί κλίμα ασφάλειας και άνεσης για τους συνεντευξιαζόμενους.

Θέλοντας να προσδιορίσουμε και να διασφαλίσουμε την αξιοπιστία και την εγκυρότητα των ευρημάτων μας, προχωρήσαμε στη μέθοδο της τριγωνοποίησης (Cohen et al., 2008). *«Η τριγωνοποίηση είναι η διαδικασία της επιβεβαίωσης στοιχείων από διαφορετικά άτομα, ειδών δεδομένων ή μεθόδων συγκέντρωσης δεδομένων»* (Creswell, 2011, σελ. 299). Με τη συγκεκριμένη διαδικασία, ο ερευνητής μπορεί να κατανοήσει και να περιγράψει το υπό εξέταση θέμα με μεγαλύτερη πληρότητα, μέσα από τη σύγκριση διαφορετικών περιγραφών της ίδιας κατάστασης. Από τους τέσσερις τύπους τριγωνοποίησης που ανέφερε ο Robson (2007), χρησιμοποιήσαμε τον τύπο αυτό που προϋποθέτει τη χρήση περισσότερων μεθόδων για τη συλλογή δεδομένων, όπως παρατήρηση, ατομικές συνεντεύξεις και την ομάδα εστίασης. Πρόκειται για τη μεθοδολογική τριγωνοποίηση ή τριγωνοποίηση μεθόδων συλλογής δεδομένων (Creswell, 2011).

Ακολουθήσαμε βήμα προς βήμα όλα τα στάδια της διαδικασίας με την προσεκτική ακρόαση της κάθε συνέντευξης, την απομαγνητοφώνησή της και την αντιπαραβολή αυτής με το κείμενο που είχαμε καταγράψει, ώστε να διασταυρωθούν και να επιβεβαιωθούν τα συλλεχθέντα στοιχεία.

Προκειμένου να εξασφαλιστεί η αξιοπιστία της μελέτης, έγινε λεπτομερής περιγραφή όλων των βημάτων που ακολουθήθηκαν κατά τη διάρκεια της παρούσας έρευνας, ώστε να μπορεί να φανεί χρήσιμη για κάθε ενδιαφερόμενο σχετικά με τα στοιχεία που περιέχει.

Τέλος, συνδέσαμε τα αποτελέσματά μας με ευρήματα προγενέστερων σχετικών μελετών, που όπως αναφέρει ο Creswell (2011) συντελεί στη διασφάλιση της αξιοπιστίας μιας έρευνας.

3. Ευρήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει παρουσίαση των ευρημάτων που προέκυψαν από την επεξεργασία και την ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων που συλλέξαμε. Η παρουσίαση ακολουθεί τη σειρά των κατηγοριών-υποκατηγοριών που ορίστηκαν, όπως παρουσιάζονται

στον θεματικό χάρτη,⁸ και με τον ίδιο τρόπο παρουσιάζονται και οι απαντήσεις των ερωτώμενων. Οι συμμετέχοντες στην έρευνά μας κωδικοποιήθηκαν ως εξής: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8 κορίτσια, M9, M10 αγόρια.

3.1 Εντυπώσεις και εκτιμήσεις των παιδιών από την εφαρμογή του προγράμματος

Οι εντυπώσεις και οι εκτιμήσεις που σχηματίστηκαν στα παιδιά μετά την εφαρμογή και υλοποίηση του προγράμματος δεν είναι μονοσήμαντες, αλλά χαρακτηρίζονται από πολλά και διαφορετικά στοιχεία. Τα κύρια σημεία που εξετάζουμε στην παρούσα θεματική σχετίζονται με το πρώτο ερευνητικό μας ερώτημα και αφορούν τις προσωπικές-ατομικές αντιλήψεις τους για τις δραστηριότητες που περιελάμβαναν τη χρήση του προγράμματος και την αξιοποίηση του ψηφιακού περιβάλλοντος. Η θεματική ανάλυση των σχολιασμών των παιδιών κατέληξε στη διαμόρφωση τριών κατηγοριών: α) την ψυχαγωγία, β) τη χρησιμότητα-ευχρηστία και γ) τη μαθησιακή υποστήριξη.

3.1.1. Ψυχαγωγία

Από τις απαντήσεις που συλλέξαμε, διαπιστώσαμε ότι τα παιδιά αναφέρθηκαν στον διασκεδαστικό και ψυχαγωγικό χαρακτήρα της εργασίας με το πρόγραμμα. Τονίζουν τον παιγνιώδη τρόπο μάθησης που προσφέρει, καθώς μαθαίνουν τα κλάσματα παίζοντας, όπως αναφέρουν. Πειραματίζονται με πολλούς κλασματικούς αριθμούς και δοκιμάζουν πολλές επιλογές. Ο παιγνιώδης χαρακτήρας προσφέρει ευχαρίστηση και κάνει το πρόγραμμα να έχει ενδιαφέρον για τα παιδιά, απομακρύνοντας, ταυτόχρονα, την κούραση και την ανία. Χαρακτηριστικές απαντήσεις που επιβεβαιώνουν τον παραπάνω ισχυρισμό είναι οι ακόλουθες:

M2: *«Έχει πάρα πολλή πλάκα, γιατί στον υπολογιστή είναι διασκεδαστικό. Στο τετράδιο πρέπει να σβήνεις, να ξαναγράφεις, να σβήνεις, γεμίζεις τετράδιο. Ενώ εδώ είναι τελείως φανερά».*

M10: *«Θεωρώ πως είναι ένα διασκεδαστικό πρόγραμμα και ωραίο, επειδή μπορούσες εσύ να χειριστείς τα κλάσματα και να κάνεις αυτό που ήθελες εσύ».*

M2: *«Εδώ παίζεις και μαθαίνεις, ενώ στον πίνακα θα της πιαστεί της δασκάλας ο καρπός, γιατί θα γράφει. Και θα γράφουμε κι εμείς και θα πονέσει ο καρπός μας».*

⁸Βλ. Παράρτημα Γ

M3: «Το παίρνουν σαν παιχνίδι τα παιδιά. Είναι πιο κατανοητό, γιατί δίνουν πιο πολλή έμφαση σ' αυτό. Επειδή είναι σαν παιχνίδι και περνάμε καλά».

M4: «[...]Παίζεις με τους αριθμούς και μαθαίνεις τα κλάσματα».

M3: «Μου αρέσει εμένα το πρόγραμμα.[...]Εδώ περνάς ωραίο χρόνο».

M3: «Μου φαίνεται πολύ ενδιαφέρον.[...]Είναι κάτι καινούριο στον υπολογιστή κι εμένα μου αρέσει να ασχολούμαι με τον υπολογιστή και να κάνω δουλειές εκεί πέρα. Οπότε είναι μια νέα αρχή».

M1: «[...]Ενώ στο πρόγραμμα αυτό στον υπολογιστή έδειχνε ότι μπορείς να τα μετακινήσεις, να παίζεις πιο πολύ».

Αναφέρθηκε η άποψη πως τα χρώματα, οι εικόνες και η φωτεινή οθόνη κερδίζουν την προσοχή τους και όλες οι εργασίες γίνονται γρήγορα και άμεσα.

M4: «Προσωπικά πιστεύω ότι στον υπολογιστή μπορείς να καταλάβεις περισσότερο, επειδή είναι φωτεινή η οθόνη και σε τραβάει κι έχει πολλές εικόνες».

M1: «Κατευθείαν μπορούμε να το καταλάβουμε εύκολα. Έχει κάποιες εικόνες που μας το κάνει πολύ αναλυτικά».

M2: «...ότι κουνιούνται μόνα τους μερικά πράγματα (γελάει). Έχει πιο πολλή πλάκα να το κάνεις, γιατί προσέχεις».

M8: «[...]Έχει μεγάλη διαφορά το ότι χρησιμοποιείς το κουμπιότερ, αντί να ζωγραφίζεις στον πίνακα και είναι πιο διασκεδαστικό και ωραίο».

M4: «Μου φαίνονται πιο εύκολα, γιατί στην τάξη μπορεί να μην προσέχεις κάποια στιγμή και να το χάσεις όλο. Ενώ εδώ προσέχεις, δε γίνεται».

M8: «Σου τραβάει πιο πολύ το ενδιαφέρον να κοιτάξεις».

Όλοι οι μαθητές σχολίασαν θετικά. Εξαίρεση αποτέλεσε ένας μαθητής, ο οποίος είχε την άποψη ότι το πρόγραμμα δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

M10: «Εντάξει, ωραία είναι. Είναι λίγο βαρετό. Γιατί δεν είναι σαν τον πίνακα που πρέπει να σηκωθείς. Είναι πιο ωραία στον πίνακα να λύνεις. Ενώ εδώ τα έχεις όλα έτοιμα».

3.1.2 Χρησιμότητα-Ευχρηστία

Τα παιδιά χαρακτηρίζουν το πρόγραμμα εύκολο κι εύρηστο, γιατί μπορούν να γράφουν και να σβήνουν γρήγορα κι εύκολα, να μετακινούν και να χειρίζονται τα κλάσματα με άνεση, καθώς και να διορθώνουν άμεσα τα λάθη που κάνουν, πατώντας απλά ένα πλήκτρο. Το αποτέλεσμα, όπως λένε, είναι να κερδίζουν χρόνο, για να ασχοληθούν με περισσότερες δραστηριότητες. Επιπρόσθετα, σημειώνουν πως έχουν στη διάθεσή τους πληθώρα από

σχήματα, μοντέλα και αναπαραστάσεις, που μετακινούνται και μεταβάλλονται με ένα κλικ, σε αντίθεση με τον πίνακα, όπου δεν υπάρχει παρόμοια οπτικοποίηση των κλασμάτων. Διαπιστώσαμε την άνεση των μαθητριών/τών στη διαχείριση των επιλογών που παρείχε το πρόγραμμα και αποτυπώνεται και στα σχετικά αποσπάσματα που ακολουθούν:

M9: «Είναι πιο εύκολο να λύνεις στον υπολογιστή, απ' το να γράφεις συνέχεια. [...] γιατί κουνάς μια τελεία και σου βγαίνει κατευθείαν το σχήμα, ενώ στο χαρτί πρέπει να το γράφεις συνέχεια».

M5: «Ναι, μ' αυτό εδώ το βελάκι είναι πιο εύκολο και να σβήσεις και να γράφεις».

M3: «Μπορείς να χρωματίζεις, το κουνάς, όπου θες το πας, το κάνεις ό,τι θέλεις».

M10: «[...] γιατί στο χαρτί χρειάζεται να γράφεις και να σβήνεις. Εδώ με ένα πλήκτρο, ουσιαστικά, γίνεται πιο εύκολο».

M1: «Είναι πάρα πολύ εύκολο, γιατί μπορώ να δοκιμάσω πολλά κλάσματα».

M1: «Πιο πολύ μου έκανε εντύπωση ότι το καταλάβαινες από την ώρα που έμπαινες, δηλαδή σου ζήτηγε τη λύση κι έπρεπε να τη βρεις, με λίγα λόγια, παίζοντας».

M10: «[...]ενώ εδώ μας τις λύνει (=εργασίες) και τις δείχνει αυτόματα πατώντας ένα κουμπί μόνο».

M1: «[...]γιατί στον πίνακα δεν είναι τόσο εύκολο να τα σχεδιάσεις όλα αυτά, ενώ εδώ στον υπολογιστή με το που μπαίνεις στο μάθημα στο συγκεκριμένο πρόγραμμα, είναι ήδη έτοιμα. Άρα δε χάνεις και χρόνο».

M3: «[...]Κερδίζεις χρόνο, επειδή δεν μπορείς στον πίνακα να σχεδιάζεις και να σβήνεις, να σχεδιάζεις ξανά, να μετακινείς».

M1: «[...]Αλλά εδώ σε βοηθάει πιο πολύ, γιατί σου έχει ήδη από μόνο του τα κλάσματα, έχει και αριθμογραμμές που σε βοηθάνε».

M5: «Μου έκανε εντύπωση πως αλλάζουν τόσο εύκολα τα σχήματα και ότι είναι πιο εύκολα να τα βλέπεις στην οθόνη, ενώ στον πίνακα πρέπει ούτως ή άλλως να προσέχεις και να μη χάσεις καθόλου την προσοχή σου».

Τα περισσότερα παιδιά δήλωσαν ότι οι δραστηριότητες στο πρόγραμμα ήταν αναλυτικές, με πολλές οδηγίες και τα καθοδηγούσαν βήμα - βήμα πώς πρέπει να κινηθούν και τι πρέπει να κάνουν, για να επιλύσουν την εργασία που τους δινόταν κάθε φορά.

M8: «Στην τάξη φαίνονται πιο πολύ δύσκολα, γιατί εδώ τα εξηγεί, τα έχει πιο αναλυτικά, έχει χρώματα, έχει σχήματα. Οπότε μπορείς να τα καταλάβεις λίγο πιο εύκολα, γιατί δεν μπορείς να κάνεις και τα ίδια πράγματα στον πίνακα».

M1: «Μας έκανε εντύπωση ότι τα δείχνει όλα πολύ αναλυτικά, έχει πολλές αριθμογραμμές, μετακινείς πράγματα [...]».

M9: «Ότι μπορούσες να μετακινείς τα κλάσματα και τα σχήματα πιο εύκολα ότι στα είχε βήμα βήμα, που είναι πιο εύκολο έτσι να τα καταλάβεις».

M3: «[...]γιατί αυτό έχει φτιαχτεί για παιδιά οπότε το έχουν κάνει πιο αναλυτικά φτιαγμένο. Έχει πολλές οδηγίες για πράγματα που καταλαβαίνουν τα παιδιά και να είναι πιο εύκολα στη λύση».

M9: «[...]αλλά με τα σχήματα που είχε το πρόγραμμα κι έτσι όπως τα έδειχνε, τα κατάλαβα, ναι».

M8: «[...]Τα έχει εδώ και αναλυτικά οπότε θα το καταλάβει».

Μια δυσκολία που αναφέρθηκε από μαθητή είναι η ξένη γλώσσα που χρησιμοποιείται στο πρόγραμμα και είναι τα Αγγλικά. Στην αρχή, όπως ανέφερε ο μαθητής υπήρχε μια δυσκολία λόγω της γλώσσας, η οποία όμως γρήγορα ξεπεράστηκε.

M9: «Στην αρχή, μπορεί να μην το καταλάβω, γιατί είναι στα Αγγλικά, αλλά μετά το καταλαβαίνουμε».

3.1.3 Μαθησιακή υποστήριξη

Η κατανόηση των κλασμάτων και η οικοδόμηση της γνώσης ως προσωπική υπόθεση και ενεργητική διαδικασία αποτελούν, σύμφωνα με τα ευρήματά μας, κομβικό σημείο, στο οποίο εστιάζουν τα παιδιά. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό, προχωρήσαμε στον ορισμό υποκατηγοριών. Οι υποκατηγορίες αυτές είναι η κατανόηση και η κατασκευή νοημάτων.

3.1.3.1 Κατανόηση

Από τους σχολιασμούς που συλλέξαμε, διαπιστώνουμε την παραδοχή των παιδιών για τη συμβολή και την υποστήριξη που παρέχει το ψηφιακό εργαλείο στη μαθησιακή διαδικασία. Απαντούν ότι τα βοηθάει να κατανοούν τα κλάσματα, καθώς μπορούν να δοκιμάζουν και να πειραματίζονται με μια πληθώρα κλασμάτων και παραδειγμάτων. Ουσιαστικά, υλοποιείται η αρχή του πειραματισμού και της δοκιμής μέσα από τις πολλές επιλογές που παρέχει το πρόγραμμα στους μαθητές. Επιπρόσθετα, ισχυρίζονται πως, αν κάποιος δεν έχει κατανοήσει τα κλάσματα, μπορεί να λύσει τις απορίες του μέσω της οπτικοποίησης και των πολλαπλών αναπαραστάσεων, καθώς έχει στη διάθεσή του ποικιλία μοντέλων, σχημάτων και αριθμογραμμών. Θεωρούν ως πλεονέκτημα ότι στο τέλος της κάθε δραστηριότητας μπορούν να επαληθεύσουν τις απαντήσεις τους, ως χρήσιμο μέσο που ενισχύει στα παιδιά το συναίσθημα της σιγουριάς και της εμπιστοσύνης στη μάθηση και το διδακτικό πλαίσιο. Οι ισχυρισμοί αυτοί αποτυπώνονται και στα αποσπάσματα που ακολουθούν:

M4: «Είναι πολύ ωραία, γιατί μπορείς να πειραματίζεσαι με άλλα κλάσματα και να τα μαθαίνεις ευκολότερα».

M3: «Να πειραματίζομαι με τα κλάσματα, να τους αλλάζω τον παρονομαστή και τον αριθμητή, να τα λύνω και μετά να βλέπω αν είναι σωστά ή λάθος, για να καταλαβαίνω ποια είναι τα λάθη μου και να τα καταλαβαίνω πιο πολύ».

M10: «[...]γιατί σου δείχνει τα μοντέλα που μπορείς να καταλάβεις τα κλάσματα».

M2: «Εδώ μπορώ να δοκιμάσω πολλά κλάσματα και μπορούν να δοκιμάσουν όλοι, ένας τη φορά. Και ο M9 έχει κάνει πολλές φορές και ο M10 έχει κάνει πολλές κι εγώ έχω κάνει πολλές ασκήσεις. Στο τέλος, βγάζει και την επιβεβαίωση».

M9: «Με βοήθησε να σιγουρευτώ για κάποια πράγματα που δεν ήμουν ακόμα πιο σίγουρος».

M10: «Ε ναι, τα κατάλαβα περισσότερο τα κλάσματα με τη βοήθεια των σχημάτων και των αριθμογραμμών που είχε».

M4: «Μου έκανε εντύπωση που είχαμε και μοντέλα, κάποιες φορές περισσότερα από ένα μοντέλο και αυτό σε βοηθούσε ως προς το να καταλάβεις. Δηλαδή ό,τι απορίες είχες τις καταλάβαινες».

M3: «[...]Αμα είναι κάποιος που δεν έχει καταλάβει κάτι, μπορεί να το καταλάβει πιο εύκολα από αυτό το πρόγραμμα».

M9: «Με βοηθάει να σιγουρευτώ ότι είναι όντως έτσι».

M6: «Ό,τι είχα καταλάβει. Απλώς εδώ τα επιβεβαιώνω ότι είναι σωστά».

M9: «Εδώ μπορείς να τα καταλάβεις πολύ πιο εύκολα απ' ό,τι στον πίνακα. [...] στον πίνακα πρέπει πιο πολύ να προσέχεις για να καταλαβαίνεις περισσότερο, ενώ εδώ μπορείς να τα καταλάβεις αλλιώς, και με σχήματα και με αριθμογραμμές και με διάφορους τρόπους».

M4: «[...]Με βοηθάει να καταλαβαίνω κάτι δύσκολο. Μπορεί να είναι κάτι πολύ δύσκολο και μπορεί κανείς να μην το καταλαβαίνει και μπορεί στιγμιαία να αλλάξεις ό,τι θες».

M3: «Ναι, γιατί στην τάξη μπορεί να βαριέσαι να γράφεις, ενώ αυτά τα κατανοείς επειδή τα βλέπεις. Μπορείς να τα καταλάβεις πιο εύκολα, επειδή τα βλέπεις μπροστά σου και είναι πιο εύκολο από το βιβλίο».

M10: «[...]Ενώ στο πρόγραμμα αυτό τα σχήματα στα έχει έτοιμα. Ουσιαστικά, εσύ δοκιμάζεις διάφορα μοντέλα και τα λύνεις».

M1: «[...]Δηλαδή είναι καλό να μπαίνεις από τον υπολογιστή στα μαθηματικά, για να τα καταλαβαίνεις καλύτερα».

3.1.3.2. Κατασκευή νοημάτων

Εντύπωση προκαλεί η επισήμανση των παιδιών ότι η μάθηση μέσα από τη χρήση του προγράμματος είναι ενεργητική διαδικασία και όχι παθητική μετάδοση πληροφοριών, καθώς τα ίδια χτίζουν τα δικά τους νοητικά σχήματα μέσα από τη διάδραση που αναπτύσσεται με το πρόγραμμα. Όπως παρατηρήσαμε, οι μαθήτριες/τές κατάφεραν να εντοπίσουν τρόπους επίλυσης διαφορετικούς από αυτούς που είχαν μάθει. Χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω αποσπάσματα:

M2: «[...]γιατί στον υπολογιστή εσύ τα κάνεις. Δεν τα κάνει κάποιος άλλος, για να μάθεις εσύ. Εσύ τα κάνεις για να τα μάθεις εσύ και είναι και πιο ενδιαφέρον, επειδή είναι σε έναν υπολογιστή. Και οι περισσότεροι ελκύνονται απ' αυτό».

M3: «Η δασκάλα δε χρειάζεται να είναι πάντα μπροστά. Εξάλλου, το πρόγραμμα είναι για παιδιά, μπορούν να το χρησιμοποιήσουν παιδιά και μόνα τους. Οπότε δε χρειάζεται βοήθεια συνεχής και να είναι η δασκάλα από πάνω σου και να σου λέει τι πρέπει να κάνεις. [...]»

M2: «Λοιπόν μου αρέσει που δε δουλεύει μόνο η δασκάλα στον πίνακα, δουλεύεις κι εσύ.»

M3: «Μπορείς να βρεις με το πρόγραμμα και τρόπους εκτός από αυτούς που έχουμε μάθει, να βρίσκεις το αποτέλεσμα και είναι και πιο εύκολο από εδώ να το βρεις και να το καταλάβεις κιόλας.»

M2: «Ότι μπορείς να αλλάξεις εσύ το κλάσμα όπως θέλεις κι έτσι καταλαβαίνεις πώς γίνεται να αλλάξει το κλάσμα.»

Στην ερώτηση της ερευνήτριας, αν θα μπορούσαν να καταλάβουν τα κλάσματα αποκλειστικά μέσα από τη χρήση του προγράμματος, χωρίς να έχει προηγηθεί μάθημα στην τάξη, οι απόψεις δίστανται. Κάποιοι από τους ερωτώμενους θεωρούν πως μπορούν να εργαστούν με τα κλάσματα μόνο μέσα από αυτό το πρόγραμμα. Πολλές απόψεις, ωστόσο, εστιάζονται στον συνδυασμό και των δύο στοιχείων: αρχικά, μάθημα στην τάξη και στη συνέχεια, αλληλεπίδραση με το ψηφιακό περιβάλλον του προγράμματος. Οι θέσεις των παιδιών αποτυπώνονται στα παρακάτω αποσπάσματα:

M1: «Κατευθείαν μπορούμε να το καταλάβουμε. Έχει κάποιες εικόνες που μας το κάνει πολύ αναλυτικά.»

M3: «Μπορείς να βρεις με το πρόγραμμα και τρόπους εκτός από αυτούς που έχουμε μάθει, να βρίσκεις το αποτέλεσμα. Και είναι πιο εύκολο από εδώ να το βρεις και να το καταλάβεις κιόλας.»

M1: «Δε θα ήταν δύσκολο. Βέβαια, καλό είναι να τα εξηγούμε, αλλά μέσω υπολογιστή μας τα εξήγησε η δασκάλα καλύτερα».

M10: «Ναι, με τις εικόνες θα προσπαθούσα να καταλάβω».

M9: «Μπορούμε να τα κάνουμε στην τάξη και μετά στον υπολογιστή».

M10: «Θα μπορούσαμε να έχουμε μισή ώρα να εξηγούμε τη θεωρία πριν πάμε στον υπολογιστή και μετά κατευθείαν, για να καταλάβουμε, να πηγαίνουμε στους υπολογιστές».

M9: «Για σιγουριά καλύτερα να τα κάνουμε πρώτα στην τάξη, για να δούμε τις θεωρίες και όλα αυτά και μετά να τα κάνουμε εδώ στον υπολογιστή, επειδή εδώ δεν έχει κάποια θεωρία.»

M5: «Εγώ πιστεύω στον υπολογιστή είναι πιο εύκολα.[...]στο βιβλίο απλώς μας δείχνει τη θεωρία κι έτσι τη μαθαίνουμε πιο καλά, για να λύσουμε μετά εργασίες στον υπολογιστή».

M9: «Καλύτερα πρώτα να τα κάνουμε στο βιβλίο, επειδή στον υπολογιστή δεν έχει θεωρία, έχει μόνο ασκήσεις, ενώ στο βιβλίο έχει κυρίως θεωρία και όχι πάρα πολλές ασκήσεις. Οπότε είναι καλύτερα να κάνεις τη θεωρία και μετά να έχεις χρόνο να πηγαίνεις στους υπολογιστές να κάνεις τις ασκήσεις».

M10: «Εγώ θεωρώ πως ο ένας τρόπος συμπληρώνει τον άλλον. Δηλαδή στην τάξη λέμε τη θεωρία και στον υπολογιστή τα καταλαβαίνουμε περισσότερο. Γίνονται πιο κατανοητά τα κλάσματα».

3.2. Συνεργασία και ομαδικότητα

Ένα από τα κυρίαρχα στοιχεία που αναδύθηκαν μέσα από την εφαρμογή του προγράμματος, είναι η ομαδική εργασία των μαθητών και το ομαδοσυνεργατικό διδακτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εργάστηκαν. Χωρίστηκαν σε ομάδες με τα μέλη της κάθε ομάδας να συνεργάζονται, προκειμένου να επιτύχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα. Όπως τα ίδια τα παιδιά αναφέρουν, είχαν την ευκαιρία να ανταλλάξουν πληροφορίες και γνώσεις, τις οποίες είχαν αποκομίσει από το μάθημα που είχε προηγηθεί στην τάξη. Επιπλέον, όπως προκύπτει από τα λεγόμενα των παιδιών, βασικό στοιχείο για την καλύτερη λειτουργία της κάθε ομάδας ήταν να μοιράσουν ρόλους: άλλος έγραφε στο φυλλάδιο που είχαν, άλλος έγραφε στον υπολογιστή, άλλος εντόπιζε τα λάθη. Και βέβαια, οι ρόλοι άλλαζαν ανά πρόσωπο σε κάθε δραστηριότητα. Όπως παρατηρείται μέσα από τους σχολιασμούς των συμμετεχόντων, όλοι έλεγαν την άποψή τους και πρότειναν διάφορες απαντήσεις. Στο τέλος, κατέληγαν σε

μια λύση, την οποία έγραφαν κι επαλήθευαν. Η κάθε ομάδα δούλευε στον δικό της υπολογιστή με αποτέλεσμα να μην ενοχλεί η μία ομάδα την άλλη. Όλες, όμως, οι ομάδες ήταν συγχρονισμένες στην ίδια δραστηριότητα. Στα παρακάτω αποσπάσματα αποτυπώνεται ξεκάθαρα η προτίμηση των παιδιών ως προς το ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο:

M1: *«Δεν έχει κάποια δυσκολία, γιατί συνεργαζόμαστε όλοι μαζί και είμαστε μια ομάδα».*

M3: *«Μας βοηθάει σιγά σιγά να κάνουμε πιο πολλή παρέα ο ένας με τον άλλον. Να ανταλλάσσουμε πληροφορίες, αυτά που έχουμε μάθει ο καθένας. Να βοηθάμε ο ένας τον άλλον να καταλάβει καλύτερα και να έχουμε καλύτερη συνεργασία».*

M1: *«Ναι, είναι μια ομαδική δουλειά. Μας βοηθάει πάρα πολύ. Ειδικά, αν μας βοηθήσει και στην τάξη, θα κάνουμε πολύ ωραία πράγματα ομαδικά. Αλλά εδώ είναι πιο καλά».*

M2: *«[...]Δηλαδή έχουμε ένα φυλλάδιο, ο ένας λέει τις απαντήσεις, ο άλλος τις γράφει στον υπολογιστή και ο άλλος στο χαρτί. Οπότε ναι, είναι καλύτερο, οπότε μοιράζουμε κάπως τους ρόλους».*

M1: *«Σε κάθε φυλλάδιο εργασίας, η μια έγραφε, η άλλη μετακινούσε τα κλάσματα στο πρόγραμμα».*

M8: *«Ναι, κάποιος χρησιμοποιούσε το κομπιούτερ, κάποιος έγραφε στο φυλλάδιο».*

M7: *«Λέγαμε όλοι και ό,τι πιστεύαμε πως ήταν σωστό το γράφαμε».*

M1: *«Ναι, τα κάναμε όλοι μαζί και βοηθιόμασταν. Λέγαμε όλοι μας τη γνώμη, τι προτείνει ο καθένας να κάνουμε στις πράξεις και βρίσκαμε το αποτέλεσμα».*

M2: *«Μας βοήθησε και είμαστε όλες μαζί και το κάναμε αυτό».*

M1: *«Ναι, δουλεύουμε όλοι μαζί. Χωρίζουμε πρώτα τους ρόλους, αλλά και ανταλλάσσουμε τους ρόλους. Λέμε ο καθένας την άποψή του. Μιλάμε, λέμε τις απαντήσεις όλοι μαζί και ύστερα το γράφουμε και βλέπουμε αν είναι σωστό».*

M9: *«Ο καθένας έκανε μια δουλειά. Για παράδειγμα, ο ένας έγραφε, ο άλλος έλεγε αν κάναμε λάθος και ο άλλος έγραφε στον υπολογιστή και άλλος στο χαρτί».*

Στην ερώτηση της ερευνήτριας αν είχαν τη δυνατότητα να συνομιλούν και να επικοινωνούν μέσα στο πλαίσιο της συνεργασίας, ισχυρίστηκαν ότι υπήρχε απρόσκοπτη επικοινωνία μεταξύ τους με στόχο τη μάθηση. Συνέστησαν, ωστόσο, ότι χρειάζεται να προσέχουν όταν συνομιλούν, προκειμένου να μη δημιουργείται ιδιαίτερη φασαρία. Παραθέτουμε σχετικές απαντήσεις:

M1: *«Το κάθε άτομο είχε τη γνώμη του και όλοι λέγαμε τη γνώμη μας, τις απορίες μας, συνεργαζόμασταν».*

M2: «[...]ενώ εδώ μπορούμε να μιλάμε ελεύθερα. Αν και, αν μιλάμε ελεύθερα, θα γίνει μια βαβούρα γενικά».

M4: «Μπορούμε να μιλάμε, αλλά και πάλι είναι δύσκολο[...] απλά όχι και τόσο δυνατά, να μη μιλάμε και τόσο δυνατά».

M2: «Εντάξει, ναι, μας αφήνει. Αλλά δε νομίζω ότι υπάρχουν και περιθώρια πολλά για να μιλάς».[...] «Θέλω να πω ότι δε σου κάνει να μιλάς εκείνη την ώρα, γιατί έχεις αλλού το ενδιαφέρον, ενώ στην τάξη δεν έχει και πολύ ενδιαφέρον (γελάει). Εδώ μιλάμε αλλά όχι πολύ. Μιλάμε περισσότερο για το μάθημα».

Οι απαντήσεις που λάβαμε από σχετικές ερωτήσεις, μας οδήγησαν στη διαπίστωση ότι ο ρόλος της ομάδας υπήρξε σημαντικός για τα παιδιά, καθώς η ομάδα παρείχε στα μέλη της αλληλοβοήθεια και αλληλοϋποστήριξη. Σύμφωνα με τα λεγόμενά τους, η ομάδα βοηθάει να ξεπεραστεί οποιαδήποτε δυσκολία παρουσιαστεί, χωρίς ωστόσο να υποκαθιστά τον ρόλο της δασκάλας. Τα υπόλοιπα άτομα της ομάδας στηρίζουν και ενθαρρύνουν όποιον δυσκολεύεται. Ως εκ τούτου, όπως προκύπτει από τα σχόλιά τους, το κλίμα που επικρατεί, δημιουργεί θετικά συναισθήματα, σε αντίθεση με τον ανταγωνισμό που παρατηρείται στην παραδοσιακή τάξη, όπου ο τρόπος εργασίας των μαθητών είναι ατομικός. Παραθέτουμε τα σχετικά αποσπάσματα:

M8: «Ναι, όταν κάποιο παιδάκι μπορεί να μπερδευτεί, μπορεί να του πει ο άλλος τον τρόπο, να τον βοηθήσει.[...]».

M1: «Ναι, τα κάναμε όλοι μαζί και βοηθήμασταν. Λέγαμε όλοι μας τη γνώμη, τι προτείνει ο καθένας να κάνουμε στις πράξεις και βρίσκαμε το αποτέλεσμα».

M10: «Ο καθένας στην τάξη τα κάνει για τον εαυτό του, εδώ είμαστε μια μικρή ομάδα και συζητάμε».

M3: «[...]ενώ εδώ τους αφήνει ο εκπαιδευτικός να μιλάνε και να ανταλλάσσουν τις γνώμες τους. Κι αυτό είναι πιο παιχνιδιάρικο, ας το πούμε, για τα παιδιά και το διασκεδάζουν πιο πολύ».

M10: «Στο μάθημα ο καθένας είναι για τον εαυτό του, για να πάρει καλό βαθμό. Ενώ στον υπολογιστή δε βαθμολογείται κάτι, οπότε συνεργαζόμαστε πιο εύκολα».

M4: «Ναι, γιατί σε βοηθάει να κατανοήσεις περισσότερο. Για παράδειγμα, στον πίνακα άμα θέλεις να πεις, μπορεί και ο άλλος να έχει σηκώσει χέρι και η κυρία να πει τον άλλον. Ενώ εδώ μπορείς να πεις την άποψή σου άμεσα».

M9: «Κάποιες φορές, ναι, μας βοηθάνε και οι συμμαθητές, άμα δεν ξέρουμε κάτι από τον υπολογιστή. Η δασκάλα, όμως, μπορεί να μας το πει καλύτερα και να το καταλάβουμε πιο εύκολα».

Με βάση τις απαντήσεις των μαθητριών/τών, οδηγηθήκαμε στη διαπίστωση ότι τα παιδιά αναγνωρίζουν το φαινόμενο ότι δεν είναι εύκολη πάντα η επικοινωνία μεταξύ τους, μέσα στο πλαίσιο της ομάδας. Όπως τα ίδια τα παιδιά αναφέρουν, χρειάζεται εκμάθηση και τήρηση των κανόνων διαλόγου και συνεργασίας, για να λειτουργήσει απρόσκοπτα και ικανοποιητικά η ομαδική εργασία. Παραθέτουμε τα σχετικά αποσπάσματα:

M3: *«Μου αρέσει να δουλεύουμε ομαδικά, αλλά είναι κάποιες ασκήσεις που θα ήταν καλύτερα να τις κάνει ο καθένας μόνος του, για να δούμε και τι ξέρει ο καθένας μόνος του. Για να μην του τα λύνουν όλα οι άλλοι. Γιατί μπορεί να είναι μια ομάδα και να συνεργάζονται και να λέει μόνο ο ένας τις απαντήσεις».*

M7: *«Δουλέψαμε όλες μαζί, αν και μερικές φορές η M4 έκανε τις περισσότερες φορές κι εγώ της έλεγα: «Δώσε και λίγο στη M5», «Δώσε και λίγο σε μένα».*

M5: *«Ναι, τις κάναμε μαζί τις εργασίες και λίγο παραπάνω η M4 έκανε τις ασκήσεις».*

M10: *«[...] τα προλαβαίνει και τα λέει όλα ο M9».*

M3: *«[...]Να μάθουμε να συνεργαζόμαστε και να μιλάμε όλοι».*

M9: *«[...]Να μην πεταγόμαστε».*

3.3. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Ένας από τους παράγοντες της μαθησιακής διαδικασίας είναι ο εκπαιδευτικός, ο οποίος καλείται να διαμεσολαβήσει ανάμεσα στους μαθητές και το ψηφιακό πρόγραμμα και να δημιουργήσει τις συνθήκες που θα επιτρέψουν την ανεμπόδιστη ενασχόληση των παιδιών με τις Νέες Τεχνολογίες. Τα καίρια σημεία που εξετάζουμε στην παρούσα θεματική σχετίζονται με το τρίτο ερευνητικό μας ερώτημα και αφορούν τον ρόλο του εκπαιδευτικού μέσα από την υλοποίηση του ψηφιακού προγράμματος και την υποστήριξη που παρέχει η εφαρμογή του προγράμματος στον διδακτικό του ρόλο.

3.3.1. Ποιος είναι ο ρόλος του εκπαιδευτικού;

Σε προηγούμενο σημείο της ανάλυσης δεδομένων διαπιστώσαμε μέσα από τις απαντήσεις των παιδιών ότι βοηθήθηκαν σημαντικά από το πρόγραμμα ως προς την κατανόηση των κλασμάτων και την οικοδόμηση νοητικών σχημάτων. Στη συνέχεια της ανάλυσης των απαντήσεων, διαφαίνεται ο διαμεσολαβητικός ρόλος που διαδραματίζει η εκπαιδευτικός ανάμεσα στους μαθητές και τις δυνατότητες που προσφέρει το ψηφιακό περιβάλλον του προγράμματος, με στόχο την επίτευξη της μάθησης. Τα παιδιά τονίζουν ότι το πρόγραμμα από μόνο του δεν αρκεί και η συμβολή της δασκάλας ήταν απαραίτητη. Ακολουθούν σχετικά αποσπάσματα:

M10: «Και η δασκάλα μού έμαθε πώς να το χειρίζομαι και το πρόγραμμα βοήθησε λίγο».

M4: [...]μας βοήθησε πάρα πολύ να συγχρονιστούμε, να κάνουμε αυτά που πρέπει».

M5: «Με το πρόγραμμα με βοήθησε η δασκάλα [...]κι εγώ πιστεύω ότι είναι και τα δύο το ίδιο, γιατί μας βοηθάει κι εδώ η δασκάλα, άμα κάνουμε λάθος, και στην τάξη».

M1: «Βοήθησε η δασκάλα γιατί μας δείχνει και πώς λειτουργούμε στον υπολογιστή και μας καθοδηγούσε και βήμα βήμα».

M5: «Ταυτόχρονα εξηγούμε».

M1: «Ναι, σε μάθημα πρώτα τι κάνουμε και πώς και μας έδωσε και σαν συμβουλή πώς μετακινούμε κάποια κουμπιά».

M6: «Ναι, πάντα μας βοηθούσε, ειδικά στην τάξη. Αλλά εδώ, ναι, μας βοηθούσε κι εδώ αλλά όχι και τόσο. Απλά έχει επιλέξει πριν τις σωστές δραστηριότητες».

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού, ωστόσο, είναι διαφορετικός από την παραδοσιακή τάξη, όπως προκύπτει από τα σχόλια των μαθητριών/τών. Δε μεταδίδει γνώση και δεν έχει τον πρώτο λόγο, όπως οι ίδιοι σχολιάζουν. Γίνεται η σκαλωσιά, για να φτάσουν στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω αποσπάσματα:

M10: «Η δασκάλα κάνει μάθημα στην τάξη και όταν ερχόμαστε εδώ μας κάνει μάθημα ο υπολογιστής. Η δασκάλα μάς εξηγεί απλά τι πρέπει να κάνουμε».

M9: «Στην τάξη η δασκάλα μάς λέει τις ασκήσεις, μας εξηγεί τη θεωρία, ενώ εδώ είναι ο υπολογιστής, αλλά μας εξηγεί τι πρέπει να κάνουμε».

M10: «Η δασκάλα στην τάξη έχει τον πρώτο λόγο πάντα. Ενώ στον υπολογιστή μας εξηγούσε την κάθε άσκηση κι εμείς προσπαθούσαμε να την κάνουμε μόνοι μας».

M1: «Η δασκάλα μας βασικά μας έδινε τις πρώτες συμβουλές τι θα κάνουμε και ύστερα συνεχίζαμε όλοι ομαδικά και τις κάναμε.[...]».

M3: «Η δασκάλα δε χρειάζεται να είναι πάντα μπροστά. Εξάλλου, το πρόγραμμα είναι για παιδιά, μπορούν να το χρησιμοποιήσουν παιδιά και μόνα τους».

M9: «Στο βιβλίο η δασκάλα μας δίνει πιο πολλές οδηγίες, ενώ στον υπολογιστή μπορείς να το καταλάβεις. Αν κι εκεί μας δίνει οδηγίες αλλά πιο λίγες και μπορείς να το καταλάβεις».

M10: «Στην τάξη το πάνω χέρι το έχει η δασκάλα. Μας εξηγεί, γράφουμε κανόνες στο τετράδιό μας. Ενώ στον υπολογιστή, ουσιαστικά, μας εξηγεί πώς λειτουργεί αυτό και ο υπολογιστής μετά γίνεται η δασκάλα μας».

3.3.2. Πώς υποστηρίζεται ο ρόλος του εκπαιδευτικού από την εφαρμογή του προγράμματος;

Αφού αναλύσαμε τις απαντήσεις των παιδιών, διαπιστώσαμε πως θεωρούν ότι το ψηφιακό πρόγραμμα αποτελεί υποστηρικτικό εργαλείο και για τον ρόλο της δασκάλου, καθώς όπως αναφέρουν παρέχεται ποικιλία λύσεων κι επιλογών με αποτέλεσμα να γίνεται πιο κατανοητή. Προκύπτει μέσα από τα σχόλια ότι ο ρόλος του εκπαιδευτικού δεν παραγκωνίζεται, αντίθετα ενισχύεται μέσα από τη χρήση του προγράμματος. Παραθέτουμε τα σχετικά αποσπάσματα:

M2: *«Ναι, καταλαβαίνεις καλύτερα, γιατί είσαι σε υπολογιστή και καταλαβαίνεις περισσότερο».*

M1: *«Έχει μεγάλη διαφορά, γιατί στον υπολογιστή μπαίνεις κατευθείαν στα κλάσματα, στο πνεύμα των κλασμάτων. Ενώ στο βιβλίο μαθηματικών δεν έχει τόσες συμβουλές, ο υπολογιστής και το πρόγραμμα αυτό έχει περισσότερες συμβουλές και τρόπους να σου δείξει».*

M8: *«Στην τάξη φαίνονται πιο πολύ δύσκολα, γιατί εδώ τα εξηγεί. Τα έχει πιο αναλυτικά. Έχει χρώματα, έχει σχήματα, οπότε μπορείς να τα καταλάβεις λίγο πιο εύκολα, γιατί δεν μπορείς να κάνεις και τα ίδια πράγματα στον πίνακα».*

M1: *«Η δασκάλα μας δίνει από την αρχή συμβουλές, αλλά επειδή τα λέει και το πρόγραμμα για τα κλάσματα, παίρνουμε όλοι ιδέες, και η δασκάλα κι εμείς».*

M2: *«Χωρίς παρεξήγηση είναι περισσότερο κατανοητή η δασκάλα στους υπολογιστές, επειδή έχουμε μια πιο καθαρή εικόνα. Βοηθάει ο υπολογιστής».*

M3: *«Στην τάξη είναι πιο δύσκολο για τον εκπαιδευτικό, γιατί τα παιδιά μιλάνε κιόλας μεταξύ τους και κάνουν φασαρία σε μια αίθουσα που κάνεις μάθημα».*

M6: *«Στον υπολογιστή υπάρχουν πιο πολλά παραδείγματα, ενώ στον πίνακα δεν υπάρχουν πολλά παραδείγματα».*

M1: *«Στον υπολογιστή είναι σαν να μας καθοδηγεί πιο πολύ. Μας δίνει πιο πολλές λύσεις, μας βοηθάει να καταλαβαίνουμε[...]*».

M5: *«Εγώ πιστεύω ότι δεν είναι το ίδιο, γιατί στον πίνακα μπορεί να μην προλάβεις να γράψεις περισσότερα και να μην καταλάβεις. Ενώ στον υπολογιστή καταλαβαίνεις περισσότερα και προσέχεις περισσότερο. Είναι ωραία».*

M3: *«Μ' αυτό μας βοηθήσατε να μάθουμε πιο καλύτερα».*

M8: *«Ναι, γιατί ό,τι δεν έχεις καταλάβει, δε σου αφήνει κενό. Τα εξηγεί πιο πολύ στο κομπιούτερ, ενώ στον πίνακα είναι διαφορετικά. Εδώ πέρα πιστεύω δεν αφήνει κανένα κενό, άμα έχεις και παρακολουθήσει».*

3.4. Τα Μαθηματικά μέσα από την υλοποίηση του ψηφιακού προγράμματος και τις Νέες Τεχνολογίες

Κατά τη διάρκεια της υλοποίησης του ψηφιακού προγράμματος, οι μαθήτριες/τές εξέφρασαν τις απόψεις τους για το πώς βίωσαν γενικότερα τα μαθηματικά και έδωσαν τις δικές τους προτάσεις και σκέψεις για μελλοντική αξιοποίηση των Νέων Τεχνολογιών για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οι απαντήσεις των παιδιών μας οδήγησαν σε δύο κατηγορίες για την ανάλυση των δεδομένων μας, σύγκριση με το παραδοσιακό μάθημα και προτάσεις για περαιτέρω εκπαιδευτική χρήση των Νέων Τεχνολογιών.

3.4.1. Σύγκριση με το παραδοσιακό μάθημα

Όταν το μάθημα εμπλουτίζεται με τεχνολογικά μέσα και στοιχεία, τα οποία είναι, ωστόσο, γνωστά στα παιδιά από την καθημερινή τους ζωή, η σύγκριση της νέας μορφής που αποκτούν τα μαθηματικά με τον παραδοσιακό τύπο μαθήματος, είναι αναπόφευκτη. Τα ίδια τα παιδιά εντοπίζουν τις ομοιότητες και τις διαφορές και τις επισημαίνουν. Παραθέτουμε τα σχετικά αποσπάσματα:

M4: *«Όχι, επειδή βαριέσαι στην τάξη».*

M6: *«Στην τάξη είναι λίγο πιο βαρετό, ενώ εδώ διασκεδάζεις κιόλας, είναι ομαδικό».*

M8: *«Όχι, σε αυτό μπορείς να κάνεις παραπάνω πράγματα, ενώ στον πίνακα δεν μπορείς να κάνεις τα ίδια».*

M4: *«Δεν μπορούμε στην τάξη να μιλάμε, για να λύνουμε ασκήσεις, διότι μπορεί να ενοχλούμε και τα άλλα παιδιά κι εμείς να μη συζητάμε καν για το μάθημα».*

M6: *«Εδώ είμαστε πιο ομαδικά, ενώ στην τάξη δεν πρέπει να κάνουμε και φασαρία. Οπότε δεν είναι και τόσο ομαδικά στην τάξη».*

M10: *«Δε μοιάζουν και πολύ. Στην τάξη είμαστε συνέχεια στον πίνακα και λύνουμε ασκήσεις, ενώ εδώ μας τις λύνει και τις δείχνει αυτόματα, πατώντας ένα κουμπί μόνο».*

M1: *«Στην τάξη είναι λίγο πιο δύσκολα [...]».*

M8: *«Στην τάξη φαίνονται πιο πολύ δύσκολα [...] γιατί δεν μπορείς να κάνεις και τα ίδια πράγματα στον πίνακα».*

M1: «Στην τάξη, βασικά, τα μαθηματικά είναι λίγο πιο δύσκολα και από την πρώτη στιγμή δε θα τα καταλάβεις τόσο πολύ. [...] Δηλαδή είναι καλό να μπαίνεις από τον υπολογιστή στα μαθηματικά, για να τα καταλάβεις καλύτερα».

M9: «Στο μάθημα είναι πιο δύσκολο να γίνει, επειδή είμαστε πιο πολλά άτομα και μπορούμε να κάνουμε κάποια πράγματα πιο αργά. Επειδή πρέπει να περιμένουμε όλοι να τελειώσουν και τα άλλα παιδιά να γράψουν και δεν προχωράμε μόνοι μας. Και κάποιες φορές γίνεται και φασαρία και δεν καταλαβαίνεις, ενώ εδώ είμαστε πιο λίγα άτομα και γίνεται πιο γρήγορα και πιο εύκολα».

M10: «Το παραδοσιακό μάθημα έχει την ιδιαιτερότητά του, γιατί από εκεί μαθαίνεις τα βασικά πράγματα. Ενώ το πρόγραμμα σε βοηθάει να τα καταλάβεις περισσότερο».

3.4.2. Προτάσεις για μελλοντική εκπαιδευτική χρήση των Νέων Τεχνολογιών

Μέσα από την ανάλυση των σχολίων και των απαντήσεων, διαφαίνεται η προτίμηση και η επιθυμία των παιδιών ως προς το να εντάξουμε τις ψηφιακές εφαρμογές στο διδακτικό πλαίσιο των μαθηματικών και γενικότερα της εκπαίδευσης. Τονίζουν τον διαφορετικό χαρακτήρα που αποκτά το μάθημα και παρουσιάζουν τις δικές τους προτάσεις για περαιτέρω εκπαιδευτική χρήση και αξιοποίηση των ψηφιακών εφαρμογών. Ακολουθούν τα σχετικά αποσπάσματα:

M1: «Ναι, θα ήταν πολύ πιο εύκολο. Βασικά, μακάρι η τάξη μας να ήταν , να είχαμε αντί για σελίδες και φύλλα εργασίας, να είχαμε υπολογιστή».

M2: «Εγώ θα ήθελα να χρησιμοποιώ τους υπολογιστές και για άλλα μαθήματα, όχι μόνο για τα κλάσματα ... και για άλλες ενότητες των κλασμάτων και για άλλα μαθήματα».

M3: «[...] να υπήρχε σε όλα τα μαθήματα ένα πρόγραμμα ειδικό. Στην Ιστορία να υπήρχε μια αναπαραγωγή κι έτσι θα το θυμόμασταν πιο καλά από τις εικόνες. Να βλέπουμε εικόνες, πληροφορίες».

M2: «Ναι, πάρα πολύ. Ειδικά στην Ιστορία, όπως είπε η M3, είναι καλύτερα να βλέπεις τι έγινε παρά να το διαβάσεις. Γιατί, όταν το βλέπεις, καταλαβαίνεις τι γίνεται, είναι σαν να το ζεις. Και όταν δεις κάτι, δεν μπορείς να το ξεχάσεις».

M3: «Ναι, κι έτσι θα το θυμόμαστε πιο καλά και θα μαθαίνουμε κιόλας και θα είναι πιο ελεύθερη η μάθηση».

M4: «Ε, ναι, στη Φυσική και στην Ιστορία που μπορεί να είναι λίγο πιο δύσκολα.»

M9: «Ναι, και στη Γλώσσα θα ήταν ωραίο να υπήρχε κάτι σαν θεωρία, όπως είναι και στη Γραμματική, για να τα καταλαβαίνεις και να τα εμπεδώνεις».

M1: *«Βασικά, θα ήταν ωραίο να υπήρχαν υπολογιστές και προγράμματα σχετικά με το μάθημα και να είμαστε και χωρισμένοι σε ομάδους».*

M10: *«Θα μπορούσαμε να χωριστούμε σε ομάδες των τριών ή τεσσάρων ατόμων και μια φορά την εβδομάδα να κάνουμε ομαδική εργασία σε οποιοδήποτε μάθημα».*

Επιφυλάξεις ως προς το διαφορετικό πλαίσιο εργασίας που συνεπάγεται η υλοποίηση και χρήση των ψηφιακών εφαρμογών, διατύπωσε ένας μαθητής εξαιτίας του μεγάλου αριθμού μαθητών της τάξης. Σχετικό απόσπασμα:

M9: *«Θα μπορούσαμε να κάνουμε κάποιες ασκήσεις ομαδικές και σε άλλα μαθήματα, αλλά στην τάξη δεν μπορούμε, γιατί είμαστε πολλά παιδιά και δε γίνεται να μιλάμε όλοι μαζί, να είμαστε ομαδικά».*

4. Συζήτηση-Συμπεράσματα

Η ανάλυση του ερευνητικού υλικού που προέκυψε από τις συνεντεύξεις με τα παιδιά, οδήγησε σε μια σειρά αποτελεσμάτων και στην ανάδειξη πληθώρας ευρημάτων. Στη συνέχεια, επιχειρείται συζήτηση γύρω από τα ευρήματα όπως αυτά καταγράφηκαν ως επακόλουθο της διαδικασίας που προηγήθηκε. Έπειτα, αναφέρονται οι περιορισμοί που διέπουν την έρευνα καθώς και προτάσεις, που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν στο μέλλον για μια βαθύτερη μελέτη και άλλων πτυχών που συνδέονται με το υπό εξέταση θέμα.

4.1 Γνωστική υποστήριξη

Μέσα στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας, οι μαθήτριες/τές είχαν τη δυνατότητα να γνωρίσουν τα κλάσματα μέσα από την εφαρμογή ενός διαδραστικού ψηφιακού προγράμματος (GeoGebra), να εργαστούν σε ένα διαφορετικό διδακτικό πλαίσιο, το ομαδοσυνεργατικό, να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους και με το πρόγραμμα και να δοκιμάσουν τις δυνατότητες που τους προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες. Ο στόχος της μελέτης ήταν να ελεγχθούν τα χαρακτηριστικά του προγράμματος που κινητοποιούν τους μαθητές με στόχο τη μάθηση, η γνωστική υποστήριξη που προσφέρει κι αν συνεισφέρει ως προς τη μάθηση το συγκεκριμένο πρόγραμμα και γενικότερα οι ψηφιακές εφαρμογές.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, οι μαθητές αναγνώρισαν τον διασκεδαστικό-ψυχαγωγικό και πρακτικό-λειτουργικό χαρακτήρα του προγράμματος, το οποίο προκαλώντας τον ενθουσιασμό και την ικανοποίηση επιδρά θετικά σε παράγοντες που σχετίζονται άμεσα με τη μάθηση, όπως είναι η κινητοποίηση και διατήρηση της προσοχής και η εξοικονόμηση χρόνου και προσπάθειας. Οι μαθητές ευχαριστήθηκαν το

μάθημα και δεν αντιμετώπισαν προβλήματα στον χειρισμό του, απομακρύνοντας έτσι την ανία και την κούραση. Ο παιγνιώδης χαρακτήρας του προγράμματος αυξάνει το ενδιαφέρον και ασκεί ισχυρή εσωτερική παρώθηση, που έχει ως αποτέλεσμα να μαθαίνουν, καθώς παίζουν και δοκιμάζουν. Ως εκ τούτου, ενεργοποιούνται εσωτερικά κίνητρα και μηχανισμοί που ωθούν στη μάθηση και δεν προέρχονται από κάποιο εξωτερικό παράγοντα αλλά από τους ίδιους τους μαθητές. Το αποτέλεσμα είναι να βελτιστοποιείται η μάθηση και να αυξάνεται η απόδοσή τους.

Μέσα από την ένταξη των ηλεκτρονικών εφαρμογών στα μαθηματικά, η μάθηση φαίνεται ότι αλλάζει χαρακτήρα. Χάνει την παθητική της μορφή, όπου ο δάσκαλος μεταλαμπαδεύει τη μία και μοναδική γνώση στους μαθητές, και αποκτά ενεργητική ταυτότητα. Εκτός του ότι βελτιώνεται η κατανόηση, οι μαθητές δραστηριοποιούνται και οικοδομούν τα δικά τους γνωστικά σχήματα και νοήματα. Αυτό συμβαδίζει με την άποψη του Hackenberg (2010), που υποστηρίζει πως οι μαθητές οικοδομούν οι ίδιοι τη γνώση τους μέσα από τη δημιουργία και την τροποποίηση των γνωστικών τους σχημάτων. Με αυτόν τον τρόπο, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να ασκούν αυτοέλεγχο στη μαθησιακή δραστηριότητα, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η αυτοεκτίμησή τους και να ενισχύεται η ατομική πρωτοβουλία και η αυτονομία τους.

Καθώς οι μαθητές μαθαίνουν να αλληλεπιδρούν με τα ψηφιακά μέσα, υλοποιούνται οι κύριες αρχές, σύμφωνα με τις οποίες μαθαίνουμε και για τις οποίες μιλήσαμε αναλυτικά στη βιβλιογραφική επισκόπηση⁹, όπως ο πειραματισμός και η δράση, η βιωματική και η ανακαλυπτική μάθηση (Bruner, 1960). Καλούνται να επιλύσουν προβλήματα που προέρχονται από την καθημερινή τους ζωή και σχετίζονται με τα ενδιαφέροντά τους. Στην προσπάθειά τους αυτή πειραματίζονται με πολλούς αριθμούς, δοκιμάζουν ποικίλες επιλογές και ανακαλύπτουν νέους τρόπους επίλυσης προβλημάτων. Ουσιαστικά, μέσα από τη χρήση των ψηφιακών προγραμμάτων, με τα οποία εμπλουτίζεται το μάθημα, πραγματώνεται η θεωρία του κονστрукτιβισμού¹⁰, όπου η μάθηση αποκτά προσωπικό χαρακτήρα μέσω της αυτενέργειας.

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της εφαρμογής του προγράμματος για τα μαθηματικά είναι η δυνατότητα άμεσης ανατροφοδότησης των μαθητών σε περίπτωση λάθους. Οι μαθητές ακολουθούσαν βήμα βήμα τις οδηγίες της κάθε δραστηριότητας και είχαν τη δυνατότητα να ελέγχουν την πορεία της εργασίας τους και να αποφασίζουν με ποιον

⁹Βλ. σελίδα 65

¹⁰Βλ. σελίδα 41

τρόπο θα προχωρήσουν παρακάτω. Η ανατροφοδότηση αυτή ενισχύει το συναίσθημα της σιγουριάς και της ασφάλειας γι' αυτό που κάνουν, καθώς μπορούν οι ίδιοι να διορθώσουν τα λάθη τους, χωρίς να νιώθουν ντροπή και άγχος και χωρίς να σκέφτονται ότι απειλούνται ή εκτίθενται στα μάτια των άλλων.

Το τελικό όφελος αυτού του τρόπου εργασίας είναι ο αναστοχασμός του μαθητή, καθώς ο ίδιος αποφασίζει τι πρέπει να αλλάξει στον τρόπο σκέψης του και πώς πρέπει να κινηθεί, για να είναι αποτελεσματικός σε σχέση με τον σκοπό της εκάστοτε δραστηριότητας. Όπως υποστηρίζει ο Hackenberg (2010), όταν ο κάποιος αναστοχάζεται πάνω στη σχέση που έχουν οι ενέργειές του με τα αποτελέσματα που επιφέρουν, αυτό οδηγεί στην τροποποίηση και την εσωτερίκευση ενός νοητικού σχήματος.

Επιπλέον, πρέπει να τονιστεί ξανά η σημασία της χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων μέσα από την εφαρμογή του προγράμματος. Οι μαθητές αλληλεπιδρούν με τις κλασματικές έννοιες, οι οποίες δεν περιορίζονται μόνο σε αφηρημένους κανόνες και συμβολισμούς, αλλά μέσω της οπτικοποίησης και της αισθητοποίησης συνδέονται με μια ποικιλία από μοντέλα και σχήματα, στα οποία οι μαθήτριες/τές μπορούν να παρέμβουν και να τα μετακινήσουν, να τους αλλάξουν το μέγεθος και το χρώμα, να τα χωρίσουν με διαφορετικούς τρόπους σε ίσα μέρη. Μέσα από τη χρήση των πολλαπλών μοντέλων κατάφεραν να αλληλεπιδρούν με τις διαφορετικές μορφές του κλάσματος και επομένως, να κατανοήσουν την πολυδιάστατη φύση του κλασματικού αριθμού.

Αυτό συμβαδίζει με τις έρευνες των Keijzer και Terwel (2003) και των Cramer και Wyberg (2009) που ανέδειξαν τη θετική επίδραση που άσκησε η χρήση μοντέλων και αναπαραστάσεων στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές. Ομοίως, οι Carney και Levin (2002) αναφέρονται στη λειτουργία των αναπαραστάσεων ως προς τη μνήμη, μέσα στο κείμενο, ως εύρημα πολλών ερευνών, καθώς διαπιστώθηκε ότι ο αναγνώστης θυμάται καλύτερα το περιεχόμενο ενός κειμένου, όταν αυτό συνοδεύεται από εικόνες και διάφορες αναπαραστάσεις. Όπως ισχυρίζονται οι Carney και Levin (2002), η χρήση αναπαραστάσεων εξελίσσει τη σκέψη, την αλληλεπίδραση και την επικοινωνία καθώς και τη μετάδοση των μαθηματικών ιδεών.

Η υλοποίηση του προγράμματος φαίνεται ότι ασκεί επίδραση και στο κλίμα της τάξης, το οποίο αποτελεί σημαντικό παράγοντα της μαθησιακής διαδικασίας. Χάνει τον ανταγωνιστικό του χαρακτήρα που έχει στην παραδοσιακή τάξη όπου ο καθένας εργάζεται ατομικά και έχει ως στόχο να ξεχωρίσει από τους άλλους βαθμολογικά. Εδώ οι μαθητές εργάστηκαν ομαδικά και είχαν κοινό στόχο όσον αφορά την εκάστοτε δραστηριότητα. Τα

μέλη της κάθε ομάδας μοιράζονται μεταξύ τους τις γνώσεις και τις πληροφορίες που έχουν. Επιπρόσθετα, ο καθένας έχει τον ρόλο του μέσα στην ομάδα και όλοι συνεισφέρουν στον κοινό σκοπό και γίνονται αποδέκτες του τελικού προϊόντος που είναι η μάθηση. Από την άλλη, η ομάδα λειτουργεί υποστηρικτικά προς τα μέλη της, με αποτέλεσμα κάθε παιδί να γίνεται αποδεκτό και να μη βιώνει την αποτυχία.

Βέβαια, αποτελεί κοινή παραδοχή από τους μαθητές ότι για να λειτουργήσει αποτελεσματικά η ομάδα, χρειάζεται να τηρηθούν οι κανόνες και να υπάρχει συνέπεια και αλληλοσεβασμός. Επομένως, δημιουργούνται οι συνθήκες της εκπαίδευσης των μαθητών και στο πεδίο της κοινωνικής μάθησης. Απώτερο στόχο αποτελεί η εκμάθηση των κοινωνικών κανόνων, δηλαδή η κοινωνικοποίηση των μαθητών. Επομένως, τα γνωστικά οφέλη για τα παιδιά είναι πολλαπλά και αναγνωρίζεται ο πολυσύνθετος χαρακτήρας της μάθησης.

Καθώς η μαθησιακή διαδικασία είναι πολυπαραγοντική και πολυσύνθετη, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της μελέτης, φαίνεται ότι αλλάζει και ο ρόλος του εκπαιδευτικού, ο οποίος αποτελεί, σύμφωνα με την βιβλιογραφική επισκόπηση, έναν από τους βασικούς παράγοντες της μάθησης. Ο δάσκαλος προετοιμάζει τις κατάλληλες δραστηριότητες για τους μαθητές του και δημιουργεί τις διδακτικές συνθήκες μέσα στις οποίες θα λειτουργήσει απρόσκοπτα η χρήση των ψηφιακών εφαρμογών. Δεν είναι αυτός που μεταδίδει τη γνώση και τη μία αναμφισβήτητη αλήθεια, καθώς και ο ίδιος οφείλει να εξελίσσεται διαρκώς όσον αφορά τις νέες τεχνολογίες. Γίνεται ο διαμεσολαβητής ανάμεσα στους μαθητές και τα ψηφιακά περιβάλλοντα, τα οποία αποτελούν εργαλείο υποστηρικτικό και για το δικό του διδακτικό έργο. Είναι κοντά στους μαθητές όταν τον χρειαστούν χωρίς, ωστόσο, να έχει τον πρώτο λόγο σε ό,τι γίνεται. Όπως τονίζουν οι Κολέζα (2000) και Σολομωνίδου (2006), ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι πολύ σημαντικός, γιατί εισάγει τους μαθητές στις νέες συνθήκες μάθησης, τους ενθαρρύνει και παρέχει ασφάλεια και σιγουριά μέσα στο πρωτόγνωρο διδακτικό πλαίσιο.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα από την υλοποίηση και εφαρμογή του ψηφιακού προγράμματος για τη διδασκαλία των κλασμάτων, που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία, συμβαδίζουν με τις παρατηρήσεις που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία και αφορούν, αφενός, στη θετική αντιμετώπιση από τους μαθητές των ψηφιακών και ηλεκτρονικών εφαρμογών για τα κλάσματα και αφετέρου, στα μαθησιακά οφέλη που φαίνεται να προκύπτουν από τη χρήση τους. Όπως αναδείχτηκε από την ανάλυση δεδομένων που προηγήθηκε, οι μαθητές τα εισπράττουν και τα αναγνωρίζουν.

Λογικό επακόλουθο αυτού αποτελεί η επιθυμία των μαθητριών/τών να επεκταθεί η χρήση τους και να ενταχθούν αντίστοιχα προγράμματα και τα νέα τεχνολογικά μέσα, γενικότερα, στο διδακτικό πλαίσιο και άλλων μαθημάτων, ώστε να αρθούν οι γνωστικές δυσκολίες που πολλές φορές αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τον παραδοσιακό τρόπο μαθήματος, και το μάθημα να γίνει πιο ενδιαφέρον, πιο ελκυστικό και πιο ζωντανό. Δεν απαξιώνεται από τους μαθητές η τάξη, ο πίνακας και ο ρόλος του εκπαιδευτικού. Αντίθετα, ο απώτερος στόχος είναι να εμπλουτιστεί η μαθησιακή πράξη και να ενισχυθεί το διδακτικό πλαίσιο, ώστε να προκύψουν τα βέλτιστα μαθησιακά αποτελέσματα. Όπως αναδεικνύεται από τα αποτελέσματα της μελέτης, η αξιοποίηση των ΤΠΕ φαίνεται να προσφέρει πολλές δυνατότητες προς αυτή την κατεύθυνση.

5. Περιορισμοί της έρευνας

Ο απώτερος στόχος που είχαμε σε όλη τη διάρκεια της διερευνητικής διαδικασίας ήταν η ανάδειξη έγκυρων και αξιόπιστων αποτελεσμάτων. Δε θα παραλείψουμε, ωστόσο, να αναφέρουμε κάποιους περιορισμούς, από τους οποίους διέπονται τόσο η ερευνητική διαδικασία όσο και τα ευρήματα που αντλήθηκαν.

Η συγκεκριμένη ποιοτική μελέτη περιορίζεται σε 10 μονάχα μαθήτριες/τές λόγω του περιορισμένου χρόνου που ήταν διαθέσιμος. Το περιορισμένο δείγμα οφείλεται και στην αδυναμία εύρεσης περισσότερων διαθέσιμων τάξεων μέσα στο σύντομο χρονικό διάστημα, στο οποίο έπρεπε να διεξαχθεί η έρευνα. Επιπλέον, στο σχολείο όπου διεξήχθη η μελέτη, δεν υπήρχε επάρκεια σε υπολογιστές με σύνδεση στο διαδίκτυο έτσι ώστε να συμμετέχουν περισσότεροι μαθητές. Τέλος, στην αίθουσα Πληροφορικής όπου διεξήχθη η παρούσα έρευνα, γίνονταν μαθήματα καθημερινά, εκτός από κάποιες ελάχιστες ώρες τις οποίες αξιοποιήσαμε, για να διεξάγουμε το ερευνητικό μας εγχείρημα.

Οι συμμετέχοντες, επιπρόσθετα, επιλέχθηκαν τυχαία και όχι σύμφωνα με κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο. Το μόνο χαρακτηριστικό που δίνει ομοιογένεια στην ομάδα εστίασης είναι το στοιχείο ότι είναι συμμαθητές και φοιτούν στο ίδιο τμήμα της Ε΄ τάξης. Επομένως, γνωρίζονται μεταξύ τους και νιώθουν άνετα και φιλικά.

Τέλος, να αναφέρουμε ότι το γεγονός πως η ερευνήτρια ήταν ταυτόχρονα και η δασκάλα των παιδιών, έχει διττό χαρακτήρα. Αποτελούσε, από τη μια, πλεονέκτημα, διότι εξασφάλιζε κλίμα άνεσης και ασφάλειας για τους συμμετέχοντες, από την άλλη, όμως, είναι ένα περιοριστικό στοιχείο, καθώς οι ερωτώμενοι πιθανόν να επηρεάστηκαν από τη σχέση

αυτή και να έδωσαν απαντήσεις που θεώρησαν ότι ικανοποιούν την ερευνήτρια, ακόμα κι αν δεν τους εξέφραζαν.

5.1. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Ολοκληρώνοντας την παρούσα έρευνα, προτείνονται ορισμένες προεκτάσεις για μελλοντική έρευνα. Η συγκεκριμένη διερεύνηση και μελέτη της επίδρασης του ψηφιακού προγράμματος GeoGebra μέσω της υλοποίησης και εφαρμογής του για τη διδασκαλία των κλασμάτων στο δημοτικό, μπορεί να αποτελέσει την αφετηρία για τη διεξαγωγή διεξοδικότερων ερευνών και πιο στοχευμένων σε συγκεκριμένους τομείς της εκπαιδευτικής διαδικασίας, στους οποίους μπορεί να επιδράσει η χρήση των ψηφιακών εφαρμογών, όπως είναι η σχέση των μαθητών μεταξύ τους, η σχέση τους με τον εκπαιδευτικό, το παιδαγωγικό κλίμα της τάξης, καθώς και η σχέση των μαθητών με τα μαθηματικά γενικότερα.

Προτείνεται, επίσης, η προτεινόμενη έρευνα να έχει τη δυνατότητα χρησιμοποίησης μεγαλύτερου δείγματος, ώστε τα αποτελέσματα να τυγχάνουν ευρύτερης γενίκευσης. Επιπλέον, προτείνεται να διευρυνθεί και η μεθοδολογία με συνδυασμό της ποιοτικής με την ποσοτική έρευνα, έτσι ώστε να εξεταστεί το παρόν θέμα λεπτομερέστερα, για πιο αξιόπιστα και πιο έγκυρα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να γίνει χρήση περισσότερων λογισμικών, μέσω εκπαιδευτικής παρέμβασης σε πειραματική ομάδα, όπου θα εξετάζονται συγκριτικά τα αποτελέσματα πριν και μετά την υλοποίηση των εφαρμογών. Το αποτέλεσμα θα είναι να εξεταστεί ο βαθμός στον οποίο επιδρούν οι ψηφιακές εφαρμογές στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ξενόγλωσσες

- Basmakova, I. G. (μετ. Ιωάννης Μ. Βανδουλάκης). (2014). *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*. Αθήνα: Παπασωτηρίου.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press. pp. 91-125.
- Behr, M., Wachsmuth, I., Post T. & Lesh R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers. A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 15, No. 5, pp. 323-341.
- Bird, M. (1991). *Mathematics for Young Children: An active thinking approach*. London & New York: ROUTLEDGE.
- Boulet, G. (1998). Didactical implications of children's difficulties in learning the fraction concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol. 20, No. 4, pp. 19-34.
- Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: Wiley.
- Brown, G. & Quinn, R. (2006). Algebra Students' Difficulty with Fractions: An Error Analysis. *Australian Mathematics Teacher*. V62, pp. 28-40. South Australia: Australian Association of Mathematics Teacher (AAMT).
- Bruner, J. (1960). On Learning Mathematics. *The Mathematics Teacher*, 53, pp. 610-619.
- Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Belkapp Press.
- Bulet, G. (1998). Didactical Implications of Children's Difficulties in Learning the Fraction Concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. v20 n4, pp.19-34.
- Carney, R. N. & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review*, 14(1), pp. 5-26.
- Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazzi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics, Vol 64 (No 3)*, pp. 293-316.
- Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second-grade mathematics. Στο E. von Glasersfeld (Ed.), *Constructivism in mathematics education*, pp. 157-176. Dordrecht: Kluwer.
- Clarke, V., Braun, V. & Hayfield, N. (2015). Thematic analysis. In: Smith, J. (ed.), *Qualitative psychology: A practical guide to research methods (3rd ed.)*, pp. 222-248. London: Sage Publications Ltd.

- Cramer, K. & Wyberg, T. (2009). Efficacy of Different Concrete Models for Teaching the Part-Whole Construct for Fractions. *Mathematical Thinking and Learning*. v11, pp. 226-257.
- Davis, P.& Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhauser.
- Dewey, J. (1897). My Pedagogic Creed. *School Journal*, vol. 54, pp. 77-80.
- Driscoll, M. (1980). *Research within research: Elementary School Mathematics*. St. Louis: Cermel, Inc..
- Gagne, R. (1965). *The conditions of Learning*. Holt, Rinehart & Winston.
- Goodson, I. (2001). Social Histories of Educational Change. *Journal of Educational Change*, 2. pp. 45-63.
- Gow, J. (1968). *A Short History of Greek Mathematics*. New York: CHELSEA PUBLISHING COMPANY.
- Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, 28(4),383-432.
- Hackenberg, A. J. & Lee, M. Y. (2016). Students' distributive reasoning with fractions and unknowns. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 245-263.
- Hannula, M. (2003). Locating Fraction on a Number Line. *27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*, v3, pp.17-24. Honolulu, Hawaii: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Harlen, W. (1992). Research and the Development of Science in the Primary School. *International Journal of Science Education*, V14, pp. 491-503.
- Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of Geogebra, *Proceedings of British Society for Research into Learning Mathematics*, 27 (3), pp.126-131.
- Kamii, C. & Anderson, C. (2003). Multiplication Games: How we made and used them. *Teaching Children Mathematics*. Washington.
- Kejzer, R. & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study on modeling. *Learning and Instruction*, v13, pp. 285-304.
- Kieren, T. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, pp. 49.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. New York: Cambridge University Press.

- Langford, K. & Sarullo, A. (1992). Introductory common and demical fraction concepts. In J. Robert (Ed.), *Research Ideas for the Classroom. Early Childhood Mathematics*. New York: Macmillan Publishing Company. NCTM.
- Leon, A. (1985). *The History of Education Today*. Paris: UNESCO.
- Loria, G. (μετ. Μιχαήλ Κ. Κωβαίου). (1990). *Ιστορία των Μαθηματικών*. Τόμος 2^{ος}. Αθήνα: Παπαζήση.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. S. (2015). Why Is Learning Fraction and Decimal Arithmetic So Difficult? *Fraction and Decimal Arithmetic*. In *Developmental Review*. v38, pp. 201-221.
- MacLeod, R. & Newmarch, B. (2006). *Fractions*. London, NRDC.
- Marshall, S. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*. pp. 261-288. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Morgan, D. L. (1998). *The Focus Group Guidebook: Focus Group, v. 1*. London: Sage.
- Papert, S. (1975). Teaching Children Thinking. *Journal of Structural Learning*, 4, pp. 219-229.
- Papert, S. (1980). *Mind-Storms, Children, Computers and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.
- Petit, M., Leard, R. & Marsden, E. (2010). *A Focus of Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York & London: Routledge.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1958). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. New York: Basic Books.
- Piaget, J. (1967). *The Child's Conception of the World*. London: Routledge.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. NJ: Princeton University Press.
- Reigeluth, C. (1999). *Instructional-Design Theories and Models: A New Paradigm of Instructional Theory*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sir Thomas Heath, L. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*. Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.
- Skemp, R. (1986). *The psychology of learning Mathematics*. GB: Penguin Books.
- Smith, J. (2002). *The Development of Students' Knowledge of Fractions and Ratios*. In B. Litwiller and G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions*. Virginia: NCTM. pp. 3-17.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Streefland, L. (1993). Fractions: A Realistic Approach. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*. pp. 289-325. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Struik, D. J. (1967). *A Concise History of Mathematics*. New York: Dover Publications.
- Thorndike, E.L. (1922). *The Psychology of Arithmetic*. New York: Macmillan.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in Mathematics Instruction*. The Whiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of rational numbers: A conceptual change approach. In L. Verschaffel and. Vosniadou (Eds.), *Conceptual Change in Mathematics Learning and Teaching*, Special Issue of Learning and Instruction, 14, pp. 453-467.
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Wilkinson, S. (1998). Focus groups in feminist research: power, interaction and coconstruction of meaning. *Women's Studies International Forum*, 21, pp. 111-125.
- Υψιλανδής, G. (2001). Evaluation of Internet-based Materials for Language Learning. *Πρακτικά 1^ο Συνεδρίου Ε.Τ.Π.Ε. Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση*. Σύρος.
- Ελληνόγλωσσες**
- Αλιβίζος, Σ. & Βρατσάλης, Κ. (2013). *Παιδαγωγική Αξιοποίηση των Νέων Μέσων στην Εκπαιδευτική Διαδικασία*. Αθήνα: ΙΩΝ.
- Βαϊνάς, Κ. (1997). *Ανάλυση της Διδακτικής των Μαθηματικών στην Ελλάδα*. Αθήνα: Γρηγόρη.
- Βαϊνάς, Κ. (2012). *Σκοποθεσία της Αγωγής της Εκπαίδευσης και της Διδακτικής Πράξης: Διδακτική Θεώρηση των Σκοπών σε όλα τα Επίπεδα της Παιδαγωγικής και Διδακτικής Πράξης*. Αθήνα: ΙΩΝ.
- Βάμβουκας, Μ. Ι. (2002). *Εισαγωγή στην Ψυχοπαιδαγωγική Έρευνα και Μεθοδολογία*. Αθήνα: Γρηγόρης.
- Βοσνιάδου, Σ. (1998). *Γνωσιακή Ψυχολογία*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Βοσνιάδου, Σ. (2002). *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Βοσνιάδου, Σ. (2005). *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Βοσνιάδου, Σ. (2006). *Σχεδιάζοντας Περιβάλλοντα Μάθησης Υποστηριζόμενα από τις Σύγχρονες Τεχνολογίες*. Αθήνα: GUTENBERG.

- Γαγάτσης, Α. (1991). *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Εκδ. Οίκος Αδερφών Κυριακίδη.
- Γκέτσης, Θ. (1987). Τα Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο και τα νέα Σχολικά Βιβλία. *Πρακτικά 4^ο Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας. Μαθηματικά και Παιδεία*. Αθήνα.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, L. (2008). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας* (μτφ. Σ. Κυρανάκης, Μ. Μαυράκη, Χ. Μητσοπούλου). Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Creswell, W. J. (2011). *Η Έρευνα στην Εκπαίδευση. Σχεδιασμός, Διεξαγωγή και Αξιολόγηση της Ποσοτικής και Ποιοτικής Έρευνας* (μτφ. Ν. Κουβαράκου). Αθήνα: Έλλην. (Έτος έκδοσης πρωτοτύπου 2008).
- Δανασσής- Αφεντάκης, Α. (1997). *Σύγχρονες Τάσεις της Αγωγής*. Ιδιωτική Έκδοση.
- Δάρρα, Μ. (2002). Η βελτίωση της ποιότητας: Νέα πρόκληση και προοπτική για την εκπαίδευση στον 21ο αιώνα. Στο Δ. Ματθαίου (Επιμ.), *Η Εκπαίδευση Απέναντι στις Προκλήσεις του 21^{ου} Αιώνα: Νέες Ορίζουσες και Προοπτικές*. Αθήνα: Λιβάνης.
- Δημητριάδης, Δ. & Σολομωνίδου, Χ. (1997). Ανάπτυξη ενός προγράμματος πολυμέσων για την αντιμετώπιση μαθησιακών δυσκολιών νεαρών μαθητών σε σχέση με τα κλάσματα. *Πρακτικά 3^ο Πανελληνίου Συνεδρίου Διδακτικής των Μαθηματικών και Πληροφορικής στην Εκπαίδευση*. Πανεπιστήμιο Πατρών.
- Depover, C., Karsenti, T. & Κόμης, Β. (2010). *Διδασκαλία με Χρήση της Τεχνολογίας: Προώθηση της Μάθησης, Ανάπτυξη Ικανοτήτων*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Donald, D. (2001). *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*, (μτφρ. Δ. Καραγιαννάκης & Μ. Μαγειρόπουλος). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Εξαρχάκος, Θ. (1981). Η Εξέλιξη της Μαθηματικής Επιστήμης: Μια Σύντομη Ιστορική Αναδρομή. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, V28, τεύχος 5, σσ. 45-51.
- Εξαρχάκος, Θ. (1981). Χαρακτήρας- Παιδευτική Αξία και Διδασκαλία των Μαθηματικών. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, V28, τεύχος 3, σσ. 37-44.
- Εξαρχάκος, Θ. (1984). Εκπαίδευση και Μαθηματικά, Πρακτικά 1^ο Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας. *Τα Μαθηματικά στη Στοιχειώδη Εκπαίδευση*. Αθήνα:.. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (Ε.Μ.Ε.).
- Εξαρχάκος, Θ. (1991). *Εισαγωγή στα Μαθηματικά: Τόμος Α' Άλγεβρα*. Αθήνα.
- Εξαρχάκος, Θ. (1993). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Εξαρχάκος, Θ. (1998). Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση, Αναγκαιότητα και Γενικές Αρχές. *Ενκλείδης Γ'* (Ειδική Έκδοση). σσ. 7-21. Αθήνα.

- Εξαρχάκος, Θ. (2019). Εκπαιδευτικές αλλαγές και μεταρρυθμίσεις στη χώρα μας από τις αρχές του 20ού αιώνα μέχρι σήμερα. Στο Γ. & Κ. Δαρδανός (Επιμ.), *Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση και Εκπαιδευτική Πολιτική*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Θωμαΐδης, Γ. (1990). *Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση*. Ενημερωτικό φυλλάδιο του Ομίλου για την Ιστορία των Μαθηματικών, τεύχος 13^ο.
- Θωμαΐδης, Γ. & Καστάνης, Ν. (2002). Οι Αναμορφώσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Παιδείας στο δεύτερο μισό του 20^{ου} Αιώνα. *Διάσταση*. Ε.Μ.Ε. Κεντρικής Μακεδονίας.
- Ίσαρη, Φ. και Πουρκός, Μ. (2015). *Εισαγωγή στην Ποιοτική Έρευνα*. Αθήνα: Εκδόσεις Κάλλιπος. Ανακτήθηκε από <https://repository.kallipos.gr/handle/11419/5818>
- Ιωσηφίδης, Θ. (2008). *Ποιοτικές Μέθοδοι Έρευνας στις Κοινωνικές Επιστήμες*. Αθήνα: Κριτική.
- Καζατζής, Θ. (1984). Τα Μαθηματικά και η ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα. *Πρακτικά 1^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας: Τα Μαθηματικά στη Στοιχειώδη και Μέση Εκπαίδευση*. Ε.Μ.Ε. σσ. 445-447.
- Καπετάνου- Μακρινού, Σ. (1985). Μαθηματικά και Αισθητική. *Νέα Παιδεία*, 34, σσ. 169-179.
- Κασιμάτη, Α. (1994). *Τα Αναλυτικά Προγράμματα του μαθήματος των Μαθηματικών στην Ελλάδα, (1961-1987) σε συνάρτηση με την επίδοση των μαθητών ηλικίας 12-15 ετών* (Διδακτορική Διατριβή). Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Καρούση, Σ. & Ντζιαχρήστος, Β. (2000). Ο ρόλος του εποπτικού υλικού στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, Vol 25 (No 1), 62-72.
- Κελπανίδης, Μ. (2007). Η παιδαγωγική ως επιστήμη στην Ελλάδα μετά το 1982: προέλευση, ακαδημαϊκή εξέλιξη και προσανατολισμοί του διδακτικού-ερευνητικού προσωπικού της. Στο Γ. & Κ. Δαρδανός (Επιμ.), *Σύγχρονα Παιδαγωγικά και Εκπαιδευτικά Θέματα*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Κισκύρα, Χ. Α. & Κισκύρα, Ν. Α. (1987-1988). Στόχοι της Μαθηματικής Παιδείας στο δημοτικό σχολείο και τρόποι υλοποίησης των. *Πρακτικά 4^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας: Μαθηματικά και Παιδεία*. σελ. 30-40.
- Κόκκοτας, Π. (2005). *Διδακτική των Φυσικών Επιστημών, Α' τόμος*. Αθήνα: Γρηγόρη.
- Κόκκοτας, Π. (2009). *Διδακτική των Φυσικών Επιστημών, Β' τόμος*. Αθήνα: Γρηγόρη
- Κολέζα, Ε., Μακρής, Κ. & Σούρλας, Κ. (1999). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών: Διδακτική, Θεωρία και Πράξη*. Αθήνα: GUTENBERG.

- Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.
- Κολέζα, Ε. (2006). *Μαθηματικά και Σχολικά Μαθηματικά*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Κολέζα, Ε. (2017). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Κολιάδης, Α. Ε. (1996). *Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτική Πράξη: Συμπεριφοριστικές Θεωρίες*. Τόμος Α. Αθήνα.
- Κολιάδης, Α. Ε. (1997). *Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτική Πράξη: Κοινωνικογνωστικές Θεωρίες*. Τόμος Β. Αθήνα.
- Κολιάδης, Α. Ε. (1997). *Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτική Πράξη: Γνωστικές Θεωρίες*. Τόμος Γ. Αθήνα.
- Κόμης, Β. (2004). *Εισαγωγή στις Εκπαιδευτικές Εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.
- Κοτοπούλης, Θ. (2009). *Η Διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο: Η Επίλυση Προβλημάτων*. Αθήνα: Γρηγόρη.
- Κουτσελίνη, Μ. (1991). *Ενεργητική Μάθηση και Συνεργασία*. Λευκωσία: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου.
- Κυνηγός, Χ. (2011). *Το Μάθημα Της Διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών : Από την έρευνα στην τάξη*. Αθήνα: ΤΟΠΟΣ.
- Κυνηγός, Χ. & Δημαράκη, Β. (2002). *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα: Παιδαγωγική Αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής*. Αθήνα: Καστανιώτη.
- Κυριαζή, Ν. (1999). *Η Κοινωνιολογική Έρευνα. Κριτική επισκόπηση των μεθόδων και των τεχνικών*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Λαφατζή, Ι. (2005). *Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση*. Αθήνα: Αφοί Κυριακίδη.
- Λυκούδης, Σ. (1986). Τα Βιβλία Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου. *Πρακτικά 3^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας. Τα Διδακτικά Βιβλία των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα.
- Μακράκης, Β. (2000). *Υπερμέσα στην Εκπαίδευση: Μια Κοινωνικο-επικοινωνιακή Προσέγγιση*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Μακράκης, Β. (2014). *Τεχνολογίες της Πληροφορίας και Επικοινωνίας, Γνωσιακά Ενδιαφέροντα και Εκπαιδευτικοί ως Φορείς Διδακτικής και κοινωνικής Αλλαγής*.

- Στο Σ. Αλιβίζος & Κ. Βρατσάλης, *Παιδαγωγική Αξιοποίηση των Νέων Μέσων στην Εκπαιδευτική Διαδικασία*, 47-57. Αθήνα: ΙΩΝ.
- Μακρή, Α. (2008). *Αξιοποίηση Ψηφιακών Εργαλείων Συνεργασίας κατά την Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών σε Συμβατικά Μεταπτυχιακά Προγράμματα Σπουδών*. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Σχολή Φιλοσοφική, Τμήμα Φιλοσοφίας, Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας, Τομέας Παιδαγωγικής, Αθήνα. Ανακτήθηκε από <https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/26330>
- Μαραγκουδάκης, Γ. (1994). Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση 1964-67. Πρώτες Προσπάθειες Θεωρητικής Θεμελίωσης Νέου Αναλυτικού Προγράμματος (Μαθηματικών) για τα Σχολεία της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. *Το Σχολείο του Μέλλοντος*, 10, σσ. 26-28.
- Ματθαίου, Δ. (2019). Εκπαιδευτική μεταρρύθμιση: Η σημασία του σχεδίου εφαρμογής της. Στο Γ. & Κ. Δαρδανός (Επιμ.), *Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση και Εκπαιδευτική Πολιτική*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Ματσαγγούρας, Η. (1999). *Θεωρίες Μάθησης*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Ματσαγγούρας, Η. (2006). *Θεωρία και Πράξη της Διδασκαλίας (Πρώτος Τόμος)*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Ματσαγγούρας, Η. (2008). *Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση*. Αθήνα: ΓΡΗΓΟΡΗ.
- Ματσαγγούρας, Η. (2009). *Εισαγωγή στις Επιστήμες της Παιδαγωγικής*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Ματσαγγούρας, Η. (2011). *Θεωρία και Πράξη της Διδασκαλίας (ΕΠΙΤΟΜΟ)*. Αθήνα: GUTENBERG.
- Μπούφη, Α. (1995). Μία προσπάθεια αλλαγής του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας των Μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, Vol 25 (No 1), 49-65.
- Νόβα-Καλτσούνη, Χ. (2006). *Μεθοδολογία Εμπειρικής Έρευνας στις Κοινωνικές Επιστήμες*. Αθήνα: Gutenberg.
- Ντρενογιάννη, Ε. (2003). *Χρήση Η/Υ στην Καθημερινή Εργασία των Εκπαιδευτικών: Η Εκπαιδευτική Αξιοποίηση*. Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ. / Διδασκαλείο «Δ. Γληνός».
- Πετρουλάκη, Ν. (1981). *Προγράμματα, Εκπαιδευτικοί στόχοι, Μεθοδολογία*. Αθήνα: Φελέκη.
- Piaget, J. (1979). *Ψυχολογία και Παιδαγωγική*. Αθήνα: Νέα Σύνορα.
- Πιαζέ, Ζ. (1986). *Η Ψυχολογία της Νοημοσύνης*. Αθήνα: Καστανιώτης.

- Πολυχρονόπουλος, Π. (1986). Το Πρόβλημα της Μορφωτικής Αξίας των Διδασκομένων Μαθηματικών στην Μ. Ε.: Συμβολή στην Πληρέστερη διερεύνησή του. *Νέα Παιδεία*, 34, σσ. 38-56.
- Ράπτης, Α. & Ράπτη, Α. (1999). *Πληροφορική και Εκπαίδευση. Συνολική Προσέγγιση*. Τόμος Α'. Αθήνα: Έκδοση συγγραφέων.
- Ράπτης, Α. & Ράπτη, Α. (2004). *Μάθηση και Διδασκαλία στην Εποχή της Πληροφορίας: Ολική Προσέγγιση*. Αθήνα: Αριστοτέλης Ράπτης.
- Ρέλλος, Ν. (2007). *Η Διδασκαλία μέσα από τη θεώρηση των δομικών της στοιχείων*. Θεσσαλονίκη: Κυριακίδη Αφοί.
- Robson, C. (2007). *Η Έρευνα του Πραγματικού Κόσμου* (μτφρ. Β. Νταλάκου & Κ. Βασιλικού, επιμ. Κ. Μιχαλοπούλου). Αθήνα: GUTENBERG.
- Ρουσόπουλος, Γ. (1987-1988). Ιστορία και Φιλοσοφία των Μαθηματικών- Ο ρόλος τους στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Πρακτικά 4^ο Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας. Μαθηματικά και Παιδεία*. Αθήνα.
- Σάλτας, Β. (2009). *Στοιχεία Διδακτικής και Παιδαγωγικής*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.
- Σολομωνίδου, Χ. (2001). *Σύγχρονη Εκπαιδευτική Τεχνολογία*. Θεσσαλονίκη: Κώδικας.
- Σολομωνίδου, Χ. (2006). *Νέες Τάσεις στην Εκπαιδευτική Τεχνολογία: Εποικοδομητισμός και Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Σταφυλίδου, Σ (2001). *Μαθηματικές Έννοιες και Διαδικασίες Μάθησης: Η Ανάπτυξη της Έννοιας του Κλάσματος* (Διδακτορική Διατριβή). Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Σταφυλίδου, Σ. & Βοσνιάδου, Σ. (2004). The Development of Students' Understanding of the Numerical Value of Fractions. *Learning and Instruction*. V14, pp.503-518.
- Τζεκάκη, Μ. (2001). Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση. *Πρακτικά 5^ο Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή. Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση*. Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ., Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΠΑ. ΜΑΚ.
- Τουμάσης, Μ. (1987). Μια Ανασκόπηση του Παγκόσμιου της Δευτεροβάθμιας Μαθηματικής Εκπαίδευσης τα Τελευταία 200 χρόνια. *Ευκλείδης Γ'*, 16, 17-60. Αθήνα.
- Τουμάσης, Μ. (1989). *Τάσεις και χαρακτηριστικά των σχολικών μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στη νεότερη Ελλάδα, σε σχέση με κοινωνικοοικονομικές αλλαγές και τις εξελίξεις στη μαθηματική επιστήμη (1836-1985)*. (Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή). Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών.

- Τουμάσης, Μ. (1994). *Διδακτική, Θεωρία και Πράξη. Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Τριλιανός, Α. (1993). *Η Αντίληψη των Δασκάλων για την Ενθάρρυνση του Μαθητή κατά τη Διδακτική Διαδικασία (Έρευνα Διδακτικής)*. Αθήνα: Εκδ. Συμμετρία.
- Τρούλης, Γ. (1992). *Τα Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο*. Αθήνα: Γρηγόρη.
- Τσιπλητάρης, Α. (2011). *Ψυχοκοινωνιολογία της Σχολικής Τάξης*. Αθήνα: Διάδραση.
- Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά. Για Δημοτικό και Γυμνάσιο. Μια Αναπτυξιακή Διαδικασία*. Αθήνα: Επίκεντρο.
- Verma, G. & Mallick, K. (2004). *Εκπαιδευτική έρευνα. Θεωρητικές προσεγγίσεις και τεχνικές* (μτφρ. Ε. Γρίβα). Αθήνα: Τυπωθήτω.
- Vygotsky, L. (1993). *Σκέψη και Γλώσσα*/ μτφρ. Α. Ρόδη. Αθήνα: Γνώση.
- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2002). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδάνος.
- Φιλιπποπούλου, Ν. (1984). Ο φόβος του μαθητή για το μάθημα των Μαθηματικών. *Πρακτικά 1^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας: Τα Μαθηματικά στη Στοιχειώδη και Μέση Εκπαίδευση*. Ε.Μ.Ε. σσ. 45-48.
- Φλουρής, Γ. (1983). *Αναλυτικά Προγράμματα για μια νέα εποχή στην Εκπαίδευση*. Αθήνα: Γρηγόρη.
- Φλουρής, Γ. (1984). *Η Αρχιτεκτονική της Διδασκαλίας και η Διαδικασία της Μάθησης*. Αθήνα: Γρηγόρη.
- Fort, M. (1992). Κονστρουκτιβισμός: Από το μαθησιακό στο παιδαγωγικό μοντέλο. Στο Φ. Καλαβάση και Μ. Μειμάρη (Εκδ.) *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών*, 351-360, Αθήνα: Προτάσεις.
- Φουντόπουλος, Μ. (1987). Στόχοι των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο. *Πρακτικά 4^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας. Μαθηματικά και Παιδεία*. Αθήνα.
- Wilder, R. (μετ. Δημ. Ψυχογιός). (1986). *Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Το Ανοικτό Πανεπιστήμιο.
- Χατζηγεωργίου, Γ. (2004). *Γνώθι το Curriculum*. Αθήνα: ΑΤΡΑΠΟΣ
- Χατζηστεφανίδης, Θ. (1986). *Ιστορία της Νεοελληνικής Εκπαίδευσης (1821- 1986)*. Αθήνα: Παπαδήμας.
- Χοντολίδου, Ε. (1987). *Η Συζήτηση για την Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση (1976-1981)*. Αθήνα: Αφοί Κυριακίδη.
- Χριστιανίδης, Γ. (2003). *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

- Χρονάκη, Α. (2004). Ο Υπολογιστής στην τάξη: Μαθητές και Εκπαιδευτικοί σε νέους ρόλους. Στο Ι. Κεκές (Επιμ.), *Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση: Ζητήματα Σχεδιασμού και Εφαρμογών, Φιλοσοφικές-Κοινωνικές Προεκτάσεις* (σσ.81-82). Αθήνα: Ατραπός.
- Χρονάκη, Α. (2010). Το «Διδακτικό πείραμα»: Η ποιοτική μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας στο πλαίσιο της διδακτικής πράξης. Στο Μ. Πουρκός και Μ. Δαφέρμος (Επιμ.), *Ποιοτική Έρευνα στην Ψυχολογία και την Εκπαίδευση: Επιστημολογικά, μεθοδολογικά και ηθικά Ζητήματα* (σσ. 605-635). Αθήνα: Τόπος.
- Ωραιόπουλος, Γ. (1987-1988). Ο ρόλος που μπορεί να παίζει ο δάσκαλος ως ο πρώτος παράγοντας της εκπαιδευτικής διδασκαλίας. *Πρακτικά 4^ο Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας. Μαθηματικά και Παιδεία*. Αθήνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Ενημερωτικό σημείωμα και συγκατάθεση γονέα

Ενημερωτικό σημείωμα Γονέα

Αγαπητοί γονείς,

Νοέμβριος 2019

Θα ήθελα να σας ενημερώσω ότι θα διεξαχθεί από τη δασκάλα της τάξης μια ερευνητική διαδικασία στην αίθουσα Πληροφορικής του σχολείου, στα πλαίσια Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής με θέμα: «Εφαρμογή, υλοποίηση και αξιολόγηση ψηφιακού προγράμματος για τη διδασκαλία των κλασμάτων». Οι μαθήτριες/τές θα χρησιμοποιήσουν τον υπολογιστή ως μέσο και εργαλείο υποστήριξης κατά τη μαθησιακή διαδικασία.

Παρακαλώ πολύ να δώσετε εγγράφως την άδειά σας για τη συμμετοχή του παιδιού σας στην έρευνα. Οι συνεντεύξεις των μαθητών θα μαγνητοφωνηθούν. Ωστόσο, *θα τηρηθεί πλήρως η ανωνυμία τους*. Τα αρχεία ήχου θα χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά και μόνο για διευκόλυνση της ερευνήτριας κατά τη συγγραφή της ερευνητικής εργασίας. Με τη συγκεκριμένη έρευνα, αισιοδοξούμε ότι θα προστεθεί ένα μικρό σώμα γνώσης γύρω από το θέμα αυτό.

Με τιμή,

Κεφαληνού Νικολίτσα

Η δασκάλα της τάξης

Συγκατάθεση Γονέα

Ο/Η υπογραφόμενος/η γονέας
της /του Έλαβα γνώση
για την έρευνα που θα πραγματοποιηθεί στο σχολείο και συμφωνώ για τη συμμετοχή
του παιδιού μου σε αυτή.

Ο γονέας

.....

(Υπογραφή)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Οδηγός συνέντευξης-Απομαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις

Ερωτήσεις συνέντευξης

Α' άξονας

1. Πώς σας φαίνεται η χρήση του προγράμματος;
2. Σας βοηθάει να κατανοήσετε την έννοια του κλάσματος;
3. Τι σας κάνει περισσότερο εντύπωση στη χρήση του προγράμματος;
4. Το μάθημα έχει για σένα το ίδιο ενδιαφέρον όταν χρησιμοποιείς το πρόγραμμα και το ίδιο χωρίς το πρόγραμμα;
5. Τι είναι αυτό που σου αρέσει περισσότερο, όταν λύνεις εργασίες με κλάσματα και ταυτόχρονα χρησιμοποιείς το πρόγραμμα;
6. Είναι εύκολη η χρήση του;

Πιο ειδικές και πιο συγκεκριμένες ερωτήσεις:

- Υπάρχει κάτι στο πρόγραμμα που δε σου αρέσει, κάτι που σε δυσκολεύει;
- Θεωρείς ότι η εικόνα που βλέπεις μπροστά σου σε βοηθάει να θυμάσαι καλύτερα;
- Σου κερδίζει το ενδιαφέρον, επειδή το βλέπεις σαν παιχνίδι;
- Αν κάνεις ένα λάθος στο πρόγραμμα, μπορείς εύκολα να το αλλάξεις; Έχεις άλλες ευκαιρίες να δοκιμάσεις;
- Σας βοηθάει να κατανοήσετε τους μεικτούς αριθμούς και τα καταχρηστικά κλάσματα;
- Σας βοήθησε να κατανοήσετε τα ισοδύναμα κλάσματα και τις μετατροπές των ισοδύναμων κλασμάτων;
- Αν δεν είχαμε κάνει μάθημα στην τάξη, θα μπορούσες μόνο από το πρόγραμμα αυτό να καταλάβεις τους μεικτούς αριθμούς και τα κλάσματα γενικότερα;
- Βοηθάνε οι αναπαραστάσεις του προγράμματος στην κατανόηση των κλασμάτων;
- Σας βοήθησε το πρόγραμμα σήμερα να καταλάβετε τη σύγκριση των κλασμάτων;
- Δοκίμασες διάφορα κλάσματα ή ασχολήθηκες μόνο με μια περίπτωση;

Β' άξονας

1. Βοηθάει το πρόγραμμα να συνεργαστείτε και να ανταλλάξετε απόψεις;
2. Όταν δυσκολεύεσαι σε βοηθάει η ομάδα σου να ξεπεράσεις τη δυσκολία και να προχωρήσεις; Ή πρέπει πάντα να απευθύνεστε στη δασκάλα;
3. Οι απόψεις και οι λύσεις των συμμαθητών σου σε βοηθούν να κατανοήσεις;
4. Ποιος είναι ο δικός σου ρόλος στην ομάδα;

Πιο ειδικές και πιο συγκεκριμένες ερωτήσεις:

- Μεταξύ σας μιλάτε πιο πολύ; Μπορείτε να μιλάτε την ώρα που δουλεύετε ομαδικά;

- Στην τάξη μπορείτε να μιλάτε και να συνεργάζεστε, όταν λύνετε ασκήσεις;
- Μοιράσατε ρόλους;
- Ο τρόπος εργασίας είναι ο ίδιος εδώ και ο ίδιος στην τάξη ως προς την ομαδικότητα;
- Ενοχλεί η μια ομάδα την άλλη, όταν μιλάει;
- Προτιμάς ο καθένας να δουλεύει μόνος του;
- Τι πρέπει να μάθουμε, για να είναι πιο εύκολη η συνεργασία;
- Αν είσατε πιο πολλοί στον υπολογιστή, είναι εύκολο να είστε σε ομάδες και ο καθένας να συμμετέχει σε μια ομάδα;
- Θα θέλατε να δουλεύετε και στην τάξη ομαδικά όπως με το πρόγραμμα αυτό; Να μπουν υπολογιστές και να χωριστείτε σε ομάδες;

Γ' άξονας

1. Η δασκάλα σάς βοήθησε να καταλάβετε τη χρήση του προγράμματος;
2. Ποιος ήταν ο ρόλος της δασκάλας με το πρόγραμμα αυτό; Στην τάξη εξηγεί, ρωτάει, διορθώνει. Το ίδιο λειτουργούσε κι εδώ;
3. Είναι το ίδιο κατανοητή τώρα η δασκάλα με πριν, όταν δε χρησιμοποιούσατε το πρόγραμμα;
4. Θεωρείς ότι το πρόγραμμα βοηθάει τη δασκάλα και το μάθημα γενικότερα;
5. Η δασκάλα ήξερε να το χρησιμοποιήσει και να δώσει τις κατάλληλες οδηγίες;
6. Οι δραστηριότητες που επέλεξε η δασκάλα σας είναι δύσκολες ή εύκολες; Θα τις θέλατε πιο εύκολες ή πιο δύσκολες;
7. Καταλάβατε ποιος ήταν ο σκοπός του σημερινού μαθήματος;

Πιο ειδικές και πιο συγκεκριμένες ερωτήσεις:

- Είναι το ίδιο αυστηρή η δασκάλα εδώ με τη χρήση του προγράμματος και το ίδιο στην τάξη;
- Είναι συνέχεια μπροστά η δασκάλα κι έχει τον πρώτο λόγο;
- Σας άφησε μόνους με το πρόγραμμα να δουλέψετε ως ομάδα;
- Αν δε βοηθούσε η δασκάλα, θα μπορούσατε να το καταλάβετε πώς γίνεται;

Δ' άξονας

1. Μοιάζουν τα μαθηματικά όπως τα διδάσκεσαι στην τάξη με τα μαθηματικά μέσα από τη χρήση του προγράμματος;
2. Υπάρχουν ομοιότητες και διαφορές;
3. Ποιες είναι οι διαφορές όταν εργαζόμαστε παραδοσιακά μόνο με το χαρτί και τον πίνακα;

4. Ποιο είναι το διαφορετικό που δίνει η χρήση του προγράμματος σε σχέση με το παραδοσιακό μοντέλο; Τι έχει και θεωρείτε πως είναι χρήσιμο και βοηθάει;
5. Τα μαθηματικά μέσα από τη χρήση του προγράμματος σου φαίνονται πιο δύσκολα ή πιο εύκολα σε σχέση με το μάθημα στην τάξη;
6. Με ποιον τρόπο προτιμάς να δουλεύουμε τα μαθηματικά; Με το βιβλίο μόνο ως εργαλείο ή συνδυαστικά να υπάρχει κι ένα ψηφιακό εργαλείο όπως το πρόγραμμα αυτό;
7. Θα θέλατε να χρησιμοποιείτε το πρόγραμμα αυτό και σε άλλες ενότητες των μαθηματικών;
8. Θα θέλατε να χρησιμοποιείτε παρόμοια ψηφιακά προγράμματα με Η/Υ και σε άλλα μαθήματα;

Απομαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις

Α' συνάντηση

Α' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Πώς σας φαίνεται η χρήση του προγράμματος που χρησιμοποιήσαμε τώρα;

M9: Είναι πιο εύκολο να λύνεις στον υπολογιστή απ' το γράφεις συνέχεια.

M2: Ότι το καταλαβαίνεις καλύτερα, γιατί έτσι το κάνεις στην πράξη.

Δ: Σας βοηθάει να κατανοήσετε την έννοια του κλάσματος;

M4: Μας βοηθάει πάρα πολύ. Μπορείς να το χωρίσεις σε κομμάτια και να μη γράφεις συνέχεια και να μην τα σχεδιάσεις.

Δ: Τι σου έκανε περισσότερο εντύπωση σ' αυτό το πρόγραμμα;

M5: Μου έκανε εντύπωση που μερικά κουτάκια αλλάζουν μόνα τους.

Δ: Αυτόματα δηλαδή;

M5: Επειδή βοηθάει πάρα πολύ το πρόγραμμα.

Δ: Γίνεται (η εκτέλεση) πιο γρήγορα;

M5: Και είναι πιο εύκολο απ' το να γράφουμε στο χαρτί.

Δ: Πολύ ωραία!

Τι είναι αυτό που σου άρεσε περισσότερο; Σου αρέσει καλύτερα να κάνεις ασκήσεις εδώ ή σου αρέσει καλύτερα να γράφεις και να λύνεις στο χαρτί;

M10: Περισσότερο εδώ, γιατί στο χαρτί χρειάζεται να γράφεις και να σβήνεις. Εδώ με ένα πλήκτρο, ουσιαστικά, γίνεται πιο εύκολο.

Δ: Τι σου άρεσε πιο πολύ; Τι βλέπεις; Τι περιλαμβάνει;

M10: Ένα ορθογώνιο που είναι χωρισμένο σε τρίγωνα.

Δ: Τα Μαθηματικά και τα κυρίως κλάσματα έχουν το ίδιο ενδιαφέρον, όταν δουλεύεις στον υπολογιστή ή όταν λύνεις στην τάξη ασκήσεις στον πίνακα και στο τετράδιο;

M1: Είναι πιο εύκολο όταν τα κάνεις στον υπολογιστή και σε βοηθάει πιο πολύ να τα καταλάβεις. Είναι πιο εύκολο να τα καταλάβεις, τα σχεδιάζεις κιάλας.

Δ: Τι άλλο έχει;

M1: Μπορείς να μετακινήσεις ό,τι θες, να το κάνεις όσο πιο πολύ μπορείς.

Δ: M6, για σένα έχει το ίδιο ενδιαφέρον όταν δουλεύεις με υπολογιστή και το ίδιο στην τάξη όταν γράφεις στο χαρτί;

M6: Όχι, είναι καλύτερα στον υπολογιστή, γιατί είμαστε πιο λίγα παιδιά. Όταν θες να σβήσεις κάτι στον υπολογιστή, είναι πιο εύκολο.

Δ: M2, είναι το ίδιο ενδιαφέρον όταν δουλεύεις σε υπολογιστή ή όταν δουλεύεις σε χαρτί;

M2: Καθόλου, στο χαρτί και πονάει ο καρπός (το χέρι), ενώ εδώ αυτό γίνεται σ' ένα λεπτό να το γράψεις και περισσότερο να το καταλάβεις.

Δ: Βοηθάει περισσότερο στην κατανόηση ή όχι;

M2: Πιστεύω ότι βοηθάει.

Δ: Πολύ ωραία!

M1, υπάρχει κάτι που δε σου αρέσει, κάτι που σε δυσκολεύει;

M1: Είναι πάρα πολύ εύκολο, γιατί μπορώ να δοκιμάσω πολλά κλάσματα.

Β' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Μπορείτε να συνεργαστείτε εδώ ως ομάδα πιο εύκολα ή πιο δύσκολα; Υπάρχει ίδια πίεση με την τάξη;

M6: Είναι πιο εύκολα.

M1: Δεν έχει κάποια δυσκολία, γιατί συνεργαζόμαστε όλοι μαζί και είμαστε μια ομάδα.

Δ: Μεταξύ σας μιλάτε πιο πολύ; Μπορείτε να μιλάτε;

M6: Ναι, μιλάμε.

Γ' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Η δασκάλα σάς βοήθησε να καταλάβετε τη χρήση του προγράμματος;

M6: Ναι.

Δ: Είναι το ίδιο κατανοητό το μάθημα, όταν χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα στον υπολογιστή και το ίδιο όταν σας το εξηγεί η δασκάλα στον πίνακα; Ποια είναι η διαφορά;

M6: Στον υπολογιστή υπάρχουν πολλά παραδείγματα, ενώ στον πίνακα δεν υπάρχουν πολλά παραδείγματα.

Δ: M1, είναι το ίδιο κατανοητό, όταν σας το εξηγεί η δασκάλα στον υπολογιστή και το ίδιο όταν σας το εξηγεί στον πίνακα;

M1: Στον υπολογιστή είναι σαν να μας καθοδηγεί πιο πολύ. Μας δίνει πολλές λύσεις, μας βοηθάει να καταλαβαίνουμε και κάποια παραδείγματα.

Δ: M9, είναι το ίδιο κατανοητό να σας εξηγήει η δασκάλα στον υπολογιστή και το ίδιο να εξηγήει στον πίνακα;

M9: Σχεδόν το ίδιο είναι, απλά εδώ έχει πιο πολλά παραδείγματα και μπορείς να το καταλάβεις πιο εύκολα. Και στον πίνακα μπορείς να καταλάβεις, γιατί έχει κάποια παραδείγματα.

Δ: Είναι το ίδιο;

M9: Το ίδιο.

M2: Εδώ και παίζεις και μαθαίνεις, ενώ στον πίνακα θα της πιαστεί της δασκάλας ο καρπός, γιατί θα γράφει. «Ωραία, παιδιά, πάμε τώρα στο δεύτερο». «Όχι, κυρία, πρέπει να τα αντιγράψουμε». Και θα πονέσει ο καρπός μας.

Δ: Άρα θέλει η διδασκαλία πιο πολύ χρόνο στον πίνακα;

M2: Εντάξει, ναι.

Δ: M3, είναι το ίδιο κατανοητό να εξηγήει το μάθημα η δασκάλα εδώ και το ίδιο στον πίνακα;

M3: Το παίρνουν σαν παιχνίδι τα παιδιά. Είναι πιο κατανοητό, γιατί δίνουν πιο πολύ έμφαση σ' αυτό.

Δ: Επειδή παίζουν;

M3: Επειδή είναι σαν παιχνίδι και περνάμε καλά.

Δ: Είναι το ίδιο κατανοητό να λύνεις στον υπολογιστή και το ίδιο στην τάξη;

M4: Δεν είναι το ίδιο κατανοητό, γιατί στον πίνακα μπορεί να μην προσέχεις και πολύ, ενώ εδώ προσέχεις γιατί είναι ηλεκτρονικό και προσέχεις.

Δ: Σου κερδίζει το ενδιαφέρον γιατί το βλέπεις σαν παιχνίδι;

M4: Ναι, μπορείς, ας πούμε, να πατάς πολλές επιλογές, να χρωματίζεις.

M5: Εγώ πιστεύω ότι δεν είναι το ίδιο γιατί στον πίνακα μπορεί να μην προλάβεις να γράψεις περισσότερα και να μην καταλάβεις. Ενώ στον υπολογιστή καταλαβαίνεις περισσότερα και προσέχεις περισσότερο. Είναι ωραία.

Δ: Αν κάνεις κάτι λάθος εδώ, μπορείς εύκολα να το αλλάξεις;

M5: Ναι, μ' αυτό εδώ το βελάκι είναι πιο εύκολο και να σβήσεις και να γράψεις.

Δ: Καταλάβατε τι θέλαμε να μάθετε σήμερα μέσα από τη χρήση του προγράμματος και σε τι να εξασκηθείτε με τις ασκήσεις αυτές;

M3: Για τα κλάσματα. Μ' αυτό μας βοηθήσατε να μάθουμε πιο καλύτερα.

M2: Κάναμε τα κλάσματα. Είχαμε αριθμογραμμές και χωρίσαμε σχήματα.

Δ: Τις κλασματικές γραμμές τις θυμάστε;

M3: Όχι πολύ. Τις είχαμε κάνει αλλά...

Δ: Τι είναι το $\frac{1}{3}$ εκεί; Για κοιτάζετε λιγάκι.

M3: Είναι το 1 από τα 3.

Δ: Είναι μια κλασματική μονάδα. Άρα, ταυτόχρονα, παίζοντας πρέπει και να εξηγούμε.

Δ' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Τι διαφορά έχει απ' το να εργαζόμαστε παραδοσιακά μόνο με χαρτί και πίνακα;

M9: Είναι πιο εύκολο, γιατί κουνάς μια τελεία και σου βγαίνει κατευθείαν το σχήμα, ενώ στο χαρτί πρέπει να το γράφεις συνέχεια.

M3: Μπορείς να χρωματίζεις, το κουνάς όπου θες το πας, το κάνεις ό,τι θέλεις.

Δ: Τι διαφορά έχει; Τι διαφορετικό βλέπεις;

M2: Ότι μπορείς να αλλάξεις εσύ το κλάσμα όπως θέλεις κι έτσι καταλαβαίνεις πώς γίνεται να αλλάξει το κλάσμα.

Δ: M4, θα ήθελες να χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα και σε άλλα κεφάλαια των κλασμάτων;

M4: Θα το ήθελα πολύ. Με βοηθάει να καταλαβαίνω κάτι δύσκολο. Μπορεί να είναι κάτι πολύ δύσκολο και μπορεί κανείς να μην το καταλαβαίνει και μπορεί στιγμιαία να αλλάξεις ό,τι θέλεις.

Δ: M5, θα ήθελες να το χρησιμοποιήσουμε και σε άλλα κεφάλαια των Μαθηματικών;

M5: Ναι, γιατί είναι πάρα πολύ βοηθητικό, είναι πολύ εύκολο και δεν είναι τόσο δύσκολο σαν το βιβλίο που γράφεις. Ενώ σ' αυτό εδώ είναι πιο εύκολο να το κάνεις.

Δ: Τι διαφορετικό έχει από το να κάνω πράξεις μόνο στο χαρτί και στον πίνακα;

M6: Εδώ είμαστε μια ομάδα και αλλάζουμε όποτε θέλουμε τα κλάσματα, ενώ σε μια φωτοτυπία πρέπει να σβήνουμε, να γράφουμε.

Δ: M10, θα ήθελες ανάλογα προγράμματα και σε άλλα μαθήματα;

M10: Στη Γλώσσα, ναι.

Δ: Γιατί θα ήταν πιο εύκολο να κάνουμε τη Γλώσσα με πρόγραμμα;

M10: Γιατί έχει πάρα πολύ γράψιμο και με τον υπολογιστή είναι πιο εύκολο απ' ό,τι στο χαρτί.

Δ: Γλιτώνουμε το γράψιμο;

M10: Δεν το γλιτώνουμε ακριβώς, αλλά είναι πιο εύκολο.

Δ: M6, θα ήθελες να χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα και σε άλλα μαθήματα;

M6: Σε όλα.

Δ: Γιατί;

M6: Γιατί είναι πιο ωραία!

Δ: Μ3,θα ήθελες να χρησιμοποιήσουμε ανάλογο πρόγραμμα και σε άλλα μαθήματα;

Μ3: Ναι, γιατί στην τάξη μπορεί να βαριέσαι να γράφεις, ενώ αυτά τα κατανοείς, επειδή τα βλέπεις. Μπορείς να τα καταλάβεις πιο εύκολα, επειδή τα βλέπεις μπροστά σου και είναι πιο εύκολο από το βιβλίο.

Μ2: Εγώ ήθελα να πω κάτι, ότι άμα ξέρεις ότι κάτι είχε γίνει στην Ιστορία παλιά, δεν μπορείς να το ξεχάσεις άμα σου έχει συμβεί. Κι επειδή το βίντεο είναι σαν να σου έχει συμβεί, ίσως το θυμάσαι καλύτερα, ενώ από το βιβλίο δεν το θυμάσαι πολύ.

Δ: Συμβαίνει κάτι ανάλογο στα Μαθηματικά; Δηλαδή, σε βοηθάει να θυμάσαι καλύτερα η εικόνα που βλέπεις μπροστά σου τώρα στο πρόγραμμα;

Μ2: Μάλλον ναι, ναι, γιατί καταλαβαίνεις κάπως πώς γίνονται τα κλάσματα.

Δ: Άρα μένει καλύτερα στη μνήμη ό,τι βλέπεις;

Μ2: Ναι.

Μ9: Με βοηθάει, αλλά στο βιβλίο με βοηθάει πιο πολύ, επειδή τα έχει γραμμένα και μπορείς να διαβάσεις πιο αναλυτικά. Αλλά και αυτό σε βοηθάει. Και εδώ μπορείς να το καταλάβεις.

Δ: Θα θέλατε να χρησιμοποιήσετε το πρόγραμμα σε άλλα μαθήματα; Βοηθάει;

Μ4: Βοηθάει πάρα πολύ, νομίζω, κατά τη γνώμη μου βασικά. Και μπορεί να σε κάνει να μάθεις πιο εύκολα πράγματα.

Μ5: Εγώ πιστεύω ότι βοηθάει πιο πολύ στην Ιστορία, επειδή στην Ιστορία μένουν πιο καλά στο κεφάλι σου.

Δ: Εδώ στα κλάσματα βοηθάει να θυμόμαστε;

Μ5: Ναι, βοηθάει.

Β' συνάντηση

Α' ΑΞΟΝΑΣ

Δ:Για να ρωτήσω την πρώτη ομάδα:

Πώς σας φαίνεται η χρήση του προγράμματος;

Μ6: Η χρήση του προγράμματος έχει πλάκα, είναι ωραίο.

Μ2: Έχει πάρα πολλή πλάκα, γιατί μερικές φορές στον υπολογιστή είναι διασκεδαστικό, γιατί στο τετράδιο πρέπει να σβήνεις, να ξαναγράφεις, να σβήνεις, γεμίζεις τετράδιο. Ενώ εδώ είναι τελείως φανερά.

Δ: Πολύ ωραία! Μ4;

Μ4: Είναι πολύ ωραίο και διασκεδαστικό, γιατί στο τετράδιο θες μισή ώρα να σβήνεις, να ξαναγράφεις, να ξανασβήνεις, να ξαναγράφεις.

Δ: Πολύ ωραία! Μ5, πώς σου φαίνεται η χρήση του προγράμματος

M5: Είναι πιο εύκολο από τον πίνακα, γιατί στο βιβλίο χρειάζεται συνέχεια να σβήνεις.

Δ: M10, πώς σου φαίνεται η χρήση του προγράμματος;

M10: Εντάξει, ωραία είναι, είναι λίγο βαρετό.

Δ: Γιατί είναι βαρετό;

M10: Γιατί δεν είναι σαν τον πίνακα που πρέπει να σηκωθείς. Είναι πιο ωραία στον πίνακα να λύνεις, ενώ εδώ τα έχεις όλα έτοιμα.

Δ: M9, πώς σου φαίνεται το πρόγραμμα;

M9: Εδώ που κάναμε σε κρατάει λίγο σε αγωνία, γιατί στο έβγαζε ένα ένα. Γενικά, εντάξει, ωραίο είναι, δεν είναι άσχημο.

Δ: M1, πώς σου φαίνεται η χρήση του προγράμματος;

M1: Είναι πιο εύκολη, γιατί στον πίνακα δεν μπορούμε τόσο εύκολα να μετακινήσουμε και να μας εξηγήσει και να μας τα κάνει η δασκάλα όπως εδώ στον υπολογιστή.

Δ: Αναλυτικά;

M1: Ναι.

Δ: M3, πώς σου φαίνεται το πρόγραμμα που χρησιμοποιήσαμε;

M3: Μου αρέσει εμένα το πρόγραμμα. Αμα είναι κάποιος που δεν έχει καταλάβει κάτι, μπορεί να το καταλάβει πιο εύκολα από αυτό το πρόγραμμα. Κερδίζεις χρόνο, επειδή δεν μπορείς στον πίνακα να σχεδιάζεις και να σβήνεις, να σχεδιάζεις ξανά, να μετακινείς. Εδώ περνάς ωραίο χρόνο.

Δ: Σας βοηθάει να κατανοήσετε τους μεικτούς αριθμούς που κάναμε εδώ και τα καταχρηστικά κλάσματα;

M1: Ναι, μας βοηθάει πάρα πολύ. Είναι σαν να το μαθαίνουμε την πρώτη φορά, το καταλαβαίνεις πολύ εύκολα.

Δ: Πρέπει να έχουμε κάνει μάθημα πριν στην τάξη, στον πίνακα;; Ή μπορούμε κατευθείαν εδώ;

M1: Κατευθείαν μπορούμε να το καταλάβουμε εύκολα. Έχει κάποιες εικόνες που μας το κάνει πολύ αναλυτικά.

M3: Μπορείς να βρεις με το πρόγραμμα και τρόπους εκτός από αυτούς που έχουμε μάθει, να βρίσκεις το αποτέλεσμα και είναι πιο εύκολο από εδώ να το βρεις και να το καταλάβεις κιόλας.

Δ: M10, σε βοηθάει το πρόγραμμα αυτό να κατανοήσεις τους μεικτούς αριθμούς και τα καταχρηστικά κλάσματα;

M10: Ναι, είναι εύκολο στο να κατανοήσεις τους μεικτούς αριθμούς.

Δ: Αν δεν είχαμε κάνει στην τάξη, θα μπορούσες μόνο από το πρόγραμμα αυτό να καταλάβεις τους μεικτούς αριθμούς;

M10: Ναι, με τις εικόνες θα προσπαθούσα να καταλάβω.

Δ: Άρα θεωρείς ότι η εικόνα βοηθάει;

M10: Ναι.

Δ: M9, σε βοηθάει το πρόγραμμα αυτό να κατανοήσεις τους μεικτούς αριθμούς και τα καταχρηστικά κλάσματα;

M9: Με βοηθάει στο να σιγουρευτώ ότι είναι όντως έτσι.

Δ: Άρα να κάνεις επαλήθευση;

M9: Ναι, σαν επαλήθευση.

Δ: Αν δεν είχαμε κάνει στην τάξη τους μεικτούς και τα καταχρηστικά κλάσματα και δεν είχαμε εξηγήσει τι είναι, θα μπορούσαμε μόνο με το πρόγραμμα να καταλάβουμε;

M9: Για σιγουριά καλύτερα να τα κάνουμε πρώτα στην τάξη, για να δούμε τις θεωρίες και όλα και μετά να πάμε να τα κάνουμε εδώ στον υπολογιστή, επειδή εδώ δεν έχει κάποια θεωρία.

Δ: Άρα καλό είναι πρώτα να τα εξηγούμε και μετά να κάνουμε ασκήσεις με το πρόγραμμα;

M9: Ναι.

Δ: Κορίτσια, σας βοήθησε το πρόγραμμα αυτό να κατανοήσετε τους μεικτούς αριθμούς και τα καταχρηστικά κλάσματα;

M2: Ναι, μάλλον περισσότερο από τα τετράδια και τους πίνακες.

Δ: M6, σε βοήθησε το πρόγραμμα στην κατανόηση;

M6: Ό,τι είχα καταλάβει. Απλώς εδώ τα επιβεβαιώνω ότι είναι σωστά.

Δ: M4, σε βοήθησε το πρόγραμμα να κατανοήσεις τους μεικτούς ή θα μπορούσες να καταλάβεις μόνο με ό,τι κάναμε στην τάξη με τον πίνακα;

M4: Σε βοηθάει πιο πολύ, διότι μπορεί στην τάξη να μην προσέχεις, γιατί στο κομπιούτερ προσέχεις, δε γίνεται.

Δ: Κερδίζει, δηλαδή, την προσοχή σου;

M4: Την προσοχή, ναι.

Δ: Τι σας έκανε περισσότερο εντύπωση στο πρόγραμμα αυτό σήμερα;

M4: Όλα.

M2: Ότι κουνιούνται μόνα τους μερικά πράγματα. (Γελάει). Έχει πιο πολλή πλάκα να το κάνεις, γιατί προσέχεις.

Δ: Έχει το ίδιο ενδιαφέρον το μάθημα με τη χρήση του προγράμματος και το ίδιο στην τάξη;

M4: Όχι, επειδή βαριέσαι στην τάξη.

M2: Πολλές φορές.

Δ: Τι σας έκανε περισσότερο εντύπωση;

M5: Μου έκανε εντύπωση πως αλλάζουν τόσο εύκολα τα σχήματα και ότι είναι πιο εύκολα να τα βλέπεις στην οθόνη, ενώ στον πίνακα πρέπει ούτως ή άλλως να προσέχεις και να μη χάσεις καθόλου την προσοχή σου.

Δ: M9, τι σου έκανε πιο πολύ εντύπωση σήμερα στο πρόγραμμα;

M9: Εδώ μπορείς να τα καταλάβεις πολύ πιο εύκολα απ' ό,τι στον πίνακα. Ενώ στον πίνακα πρέπει πιο πολύ να προσέχεις για να καταλαβαίνεις περισσότερο, ενώ εδώ μπορείς να τα καταλάβεις αλλιώς, και με σχήματα και με αριθμογραμμές και με διάφορους τρόπους.

Δ: Τι σας έκανε περισσότερο εντύπωση σήμερα στο πρόγραμμα;

M1: Μας έκανε εντύπωση ότι τα δείχνει όλα πολύ αναλυτικά, έχει πολλές αριθμογραμμές, μετακινείς πράγματα, ενώ στον πίνακα δεν είναι τόσο εύκολο, θα μπερδευτείς. Εδώ μπορεί να το κάνει και μόνο του.

Δ: Αν κάνεις κάποιο λάθος εδώ, μπορείς να έχεις άλλες ευκαιρίες να δοκιμάσεις;

M1: Ναι, πατάς ένα κουμπί και βγαίνει κατευθείαν.

M3: Το ενδιαφέρον εδώ είναι ότι μπορείς να παίζεις κιόλας, έχει πιο πολύ ενδιαφέρον.

Δ: Τι κάνει τώρα η M1;

M3: Η M1 μετακινεί τις αριθμογραμμές για να δει τι κάνουν και αλλάζουν τα σχήματα.

Δ: Κι έτσι τι βλέπω;

M3: Πώς μπορούμε να μετακινήσουμε, πώς αλλάζουν οι μεικτοί αριθμοί.

Δ: Είναι εύκολη η χρήση του;

M10: Εύκολη είναι και περισσότερο σε βοηθάει η αριθμογραμμή που έχει, γι' αυτό το κάνει πιο εύκολο.

Δ: Πώς σας φαίνεται η χρήση του συγκεκριμένου προγράμματος στα μαθηματικά;

M2: Μου φαίνεται πολύ ενδιαφέρουσα.

Δ: Για ποιους λόγους;

M2: Είναι κάτι καινούριο στον υπολογιστή κι εμένα μου αρέσει να ασχολούμαι με τον υπολογιστή και να κάνω δουλειές εκεί πέρα. Οπότε είναι μια νέα αρχή.

Δ: M4, σου φαίνεται εύκολη η χρήση του ή σε δυσκολεύει; Θα ήθελες περισσότερες οδηγίες;

M4: Δε νομίζω ότι είναι τόσο δύσκολο, για να χρειάζεται περισσότερες οδηγίες. Παίζεις με τους αριθμούς και μαθαίνεις τα κλάσματα.

Δ: Σας φάνηκε εύκολη η χρήση του προγράμματος;

M1: Ναι, είναι πολύ εύκολη και πολύ αναλυτική.

M3: Ναι, είναι πιο εύκολο από την τάξη.

Β΄ ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Σας βοηθάει να συνεργαστείτε και να ανταλλάξετε απόψεις ως ομάδα;

M1: Ναι, είναι μια ομαδική δουλειά. Μας βοηθάει πάρα πολύ. Ειδικά, αν μας βοηθήσει και στην τάξη, θα κάνουμε πολύ ωραία πράγματα ομαδικά. Αλλά εδώ είναι πιο καλά.

M3: Μας βοηθάει σιγά σιγά να κάνουμε πιο πολλή παρέα ο ένας με τον άλλον. Να ανταλλάσσουμε πληροφορίες, αυτά που έχουμε μάθει ο καθένας. Να βοηθάμε ο ένας τον άλλον να καταλάβει καλύτερα και να έχουμε καλύτερη συνεργασία.

Δ: Σας βοηθάει να συνεργαστείτε, όταν θέλετε να λύσετε μια άσκηση να πείτε ο καθένας τη γνώμη του για τη λύση της άσκησης;

M10: Όχι, γιατί τα προλαβαίνει και τα λέει όλα ο M9.

Δ: Οπότε τι πρέπει να μάθουμε; Να μην πεταγόμαστε; Να ακούμε και τον άλλον, να εξασκηθούμε στον διάλογο;

M9: Να μην πεταγόμαστε.

Δ: Αν το κάνουμε αυτό, θα είναι πιο εύκολο να συνεργαστούμε;

M10: Ναι.

Δ: Στην τάξη μπορείτε να μιλάτε όταν λύνετε μια άσκηση;

M10: Όχι.

Δ: Σας αφήνει η δασκάλα να μιλάτε στην τάξη;

M10: Όχι.

Δ: Γιατί;

M9: Γιατί αν μιλάγαμε όλοι, θα ακουγόταν πάρα πολύ δυνατά και δε θα μπορούσες να σκεφτείς.

Δ: M5, στην τάξη μπορείτε να μιλάτε και να συνεργάζεστε όταν λύνετε μια άσκηση;

M5: Όχι, γιατί δε θα συγκεντρωνόμαστε και δε θα μπορούμε να μιλάμε, γιατί θα γίνει φασαρία άμα όλοι μιλάμε. Μέσα στην τάξη πρέπει να μη μιλάμε. Ενώ εδώ μπορείς να συνεργάζεσαι και με τους άλλους.

Δ: (Σε άλλη ομάδα) Μπορείτε εδώ να συνεργάζεστε και να γελάσετε, ακόμα, όταν δείτε κάτι αστείο; Στην τάξη μπορούμε να μιλάμε όταν λύνουμε άσκηση;

M2: Στην τάξη δεν μπορούμε να μιλάμε. Άμα μιλήσουμε, μας φωνάζετε. Οπότε όχι, ενώ εδώ μπορούμε να μιλάμε ελεύθερα. Αν και, αν μιλάμε ελεύθερα, θα γίνει μια βαβούρα γενικά.

Δ: Η κάθε ομάδα είναι στον δικό της υπολογιστή;

M2: Ναι.

Δ: Ενοχλεί η μια ομάδα την άλλη, όταν μιλάει;

M2: Καθόλου.

M4: Όχι, αλλά μπορούμε να κοιτάμε και να πηγαίνουμε στα ίδια προγράμματα.

Δ: Μεταξύ σας μιλάτε εδώ, για να λύσετε την άσκηση;

M4: Μπορούμε να μιλάμε, αλλά και πάλι είναι δύσκολο.

Δ: Γίνεται φασαρία;

M4: Ναι, λίγο.

Δ: Προτιμάς δηλαδή ο καθένας να δουλεύει μόνος του;

M4: Όχι, εντάξει, απλά όχι και τόσο δυνατά, να μη μιλάμε τόσο δυνατά.

Δ: Άρα, πρέπει να προσέχουμε περισσότερο τους κανόνες γενικότερα.

Γ' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Σχετικά με τον ρόλο της δασκάλας:

Σας βοήθησε η δασκάλα σας να καταλάβετε πώς πρέπει να προχωρήσετε στο πρόγραμμα;

M6: Ναι, μας βοήθησε.

Δ: Σας βοήθησε να καταλάβετε πώς πρέπει να λύσετε την άσκηση;

M6: Και σε αυτό μας βοήθησε, γιατί στον υπολογιστή είναι λίγο πιο εύκολο.

Δ: Η δασκάλα είναι το ίδιο κατανοητή με τη χρήση του προγράμματος και το ίδιο πριν στην τάξη με τον πίνακα μόνο;

M2: Χωρίς παρεξήγηση, είναι περισσότερο κατανοητή η δασκάλα στους υπολογιστές, επειδή έχουμε μια πιο καθαρή εικόνα. Βοηθάει ο υπολογιστής.

Δ: Άρα βοηθάει και τη δασκάλα και το μάθημα γενικότερα;

M2: Ναι.

Δ: M4, η δασκάλα ήξερε να το χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα; Ή μαζί πειραματιστήκατε πάνω στο πρόγραμμα;

M4: Κατά τη γνώμη μου, ήξερε; (Ρωτάει).

Δ: Σας βοήθησε να προχωρήσετε παρακάτω; Ποιος ήταν ο ρόλος της γενικά; Σας έδωσε κάποιες οδηγίες να συγχρονιστείτε όλοι μαζί; Ή κάθισε στην άκρη;

M4: Όχι, μας βοήθησε πάρα πολύ να συγχρονιστούμε, να κάνουμε αυτά που πρέπει.

Δ: Είναι το ίδιο αυστηρή εδώ με το πρόγραμμα και το ίδιο αυστηρή στην τάξη;

M4: Όχι, είναι πιο καλή εδώ.

Δ: Ποιος είναι ο ρόλος της εκπ/κού; Σας βοήθησε να προχωρήσετε; Να καταλάβετε το πρόγραμμα;

M9: Ναι, μας βοήθησε.

Δ: Είναι το ίδιο αυστηρή εδώ;

M9: Εδώ είμαστε πιο λίγα παιδιά και δεν μπορούμε να κάνουμε τόση πολλή φασαρία όσο στην τάξη.

Δ: Σας άφηνε η δασκάλα να μιλάτε και να συνεργάζεστε;

M9: Ναι, μας άφηνε να μιλάμε.

M10: Ο καθένας στην τάξη τα κάνει για τον εαυτό του, εδώ είμαστε μια μικρή ομάδα και συζητάμε.

Δ: Άρα, σας αφήνει περιθώριο να συνεργαστείτε;

M10: Ναι.

Δ: Η δασκάλα σάς βοήθησε να καταλάβετε;

M10: Και η δασκάλα μου έμαθε πώς να το χειρίζομαι και το πρόγραμμα βοήθησε λίγο.

M5: Με το πρόγραμμα με βοήθησε η δασκάλα, αλλά και στην τάξη έχουμε τα βιβλία και την κυρία που μπορεί να μας εξηγήσει. Κι εγώ πιστεύω ότι είναι και τα δύο το ίδιο, γιατί μας βοηθάει κι εδώ η δασκάλα, άμα κάνουμε λάθος, και στην τάξη.

Δ: Δε σας άφησε μόνους σας με το πρόγραμμα;

M5: Όχι, ταυτόχρονα εξηγούμε.

M1: Βοήθησε η δασκάλα γιατί μας δείχνει και πώς λειτουργούμε στον υπολογιστή και μας καθοδηγούσε και βήμα βήμα.

Δ: Σας άφηνε να μιλάτε μεταξύ σας και να συνεργάζεστε;

M1: Ναι, ναι.

Δ: Στην τάξη σας αφήνει το ίδιο να μιλάτε;

M1: Όχι, ο καθένας μόνος του στην τάξη.

M3: Στην τάξη είναι πιο δύσκολο για τον εκπαιδευτικό, γιατί τα παιδιά μιλάνε κιόλας μεταξύ τους και κάνουν φασαρία σε μια αίθουσα που κάνεις μάθημα. Ενώ εδώ τους αφήνει ο εκπαιδευτικός να μιλάνε και να ανταλλάσσουν τις γνώμες τους. Κι αυτό είναι πιο παιχνιδιάρικο, ας το πούμε, για τα παιδιά και το διασκεδάζουν πιο πολύ.

Δ: Άρα υπάρχει ένα κλίμα πιο χαλαρό, πιο ελεύθερο;

M3: Ναι, αλλά με στόχο τη μάθηση.

Δ: Αν δε βοηθούσε η δασκάλα, θα μπορούσατε να το καταλάβετε πώς γίνεται;

M3: Ναι, γιατί αυτό έχει φτιαχτεί για παιδιά, οπότε το έχουν κάνει πιο αναλυτικά φτιαγμένο. Έχει πολλές οδηγίες, για πράγματα που καταλαβαίνουν τα παιδιά και να είναι εύκολα στη λύση.

Δ: Αν δεν είχαμε κάνει μάθημα πριν στην τάξη, θα μπορούσατε να καταλάβετε κατευθείαν για τους μεικτούς αριθμούς;

M1 και M3: Ναι, θα μπορούσαμε. Θα πρέπει λίγο να εξηγήσουμε και μετά θα ήταν ένα πολύ εύκολο μάθημα.

Δ' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Θα θέλατε να χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα αυτό ή παρόμοιο πρόγραμμα και σε άλλα μαθήματα;

M1: Ναι, θα ήταν πολύ πιο εύκολο. Βασικά, μακάρι η τάξη μας να ήταν, να είχαμε αντί για σελίδες και φύλλα εργασίας, να είχαμε τον υπολογιστή.

Δ: Να υπάρχει ένα εργαστήριο με υπολογιστή;

M1: Ναι, ένα εργαστήριο για κάθε τάξη.

M3: Ναι, θα ήταν πιο εύκολο να υπήρχε σε όλα τα μαθήματα ένα πρόγραμμα ειδικό. Στην Ιστορία να υπήρχε μια αναπαραγωγή κι έτσι θα το θυμόμασταν πιο καλά από τις εικόνες. Να βλέπουμε εικόνες, πληροφορίες.

Δ: Να παίζετε και παιχνίδια σχετικά με το μάθημα;

M3: Ναι, κι έτσι θα το θυμόμαστε πιο καλά και θα μαθαίνουμε κιόλας και θα είναι πιο ελεύθερη η μάθηση.

Δ: Θα θέλατε να χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα αυτό ή παρόμοιο πρόγραμμα και σε άλλα μαθήματα;

M10: Ναι, θα ήθελα περισσότερο στην Ιστορία, να υπάρχει ένα βίντεο μα το συγκεκριμένο μάθημα που θα είχαμε για να μάθουμε.

Δ: Θα βοηθούσε, δηλαδή, καλύτερα στο να θυμάστε τα γεγονότα για παράδειγμα;

M10: Ναι.

M9: Ναι, και στη Γλώσσα θα ήταν ωραίο να υπήρχε κάτι σαν θεωρία, όπως είναι και στη Γραμματική, για να τα καταλαβαίνεις και να τα εμπεδώνεις.

M5: Θα ήθελα να υπήρχαν και στην Ιστορία, ίδια σαν αυτό των Μαθηματικών, γιατί θα ήταν πιο εύκολο να μάθαινες την Ιστορία.

Δ: Θα θέλατε να υπάρχει ψηφιακό πρόγραμμα όπως αυτό και σε άλλα μαθήματα;

M2: Ναι, πάρα πολύ. Ειδικά στην ιστορία, όπως είπε η M3, είναι καλύτερο να βλέπεις τι έγινε, παρά να το διαβάσεις. Γιατί, όταν το βλέπεις, καταλαβαίνεις τι γίνεται, είναι σαν αν το ζεις. Και όταν δεις κάτι, δεν μπορείς να το ξεχάσεις.

Δ: M4, ποια είναι η γνώμη σου;

M4: Κι εγώ το ίδιο. Στην Ιστορία να υπάρχει ειδικό πρόγραμμα, γιατί είναι πολύ δύσκολη Ιστορία φέτος. Είναι καλύτερα να έχεις κάτι να το βλέπεις.

M6: Ναι, βοηθάει πολύ, ειδικά στην Ιστορία που είναι βαρετή. Αποκτά ενδιαφέρον.

Γ' συνάντηση

Α' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Μ4, πώς σου φαίνεται η χρήση του προγράμματος;

Μ4: Είναι πολύ ωραία, γιατί μπορείς να πειραματίζεσαι με άλλα κλάσματα και να τα μαθαίνεις ευκολότερα.

Δ: Μ7, πώς σου φαίνεται η χρήση του προγράμματος;

Μ7: Ήταν πιο εύκολη και από τον πίνακα, γιατί στον πίνακα δεν μπορείς να το σχηματίσεις τόσο καλά όσο και στον υπολογιστή.

Δ: Μ5, σε βοήθησε να κατανοήσεις τα ισοδύναμα κλάσματα και τις μετατροπές των ισοδύναμων κλασμάτων;

Μ5: Ναι, γιατί είναι πιο εύκολο στην οθόνη, γιατί μας τα βγάζει κατευθείαν και...

Δ: Αν δεν είχαμε κάνει μάθημα πριν στην τάξη στον πίνακα θα μπορούσες το ίδιο να καταλάβεις;

Μ5: Νομίζω ναι, από το βιβλίο.

Δ: Εννοώ να έχουμε κάνει και ασκήσεις πριν στον πίνακα ή κατευθείαν στον υπολογιστή, χωρίς διδασκαλία στην τάξη;

Μ5: Όχι, δε θα μπορούσα να το καταλάβω, γιατί εδώ είναι πιο πολύ για εξάσκηση.

Δ: Μ6, το μάθημα για σένα έχει το ίδιο ενδιαφέρον, όταν χρησιμοποιείς το πρόγραμμα ή είναι το ίδιο ενδιαφέρον και στην τάξη, να λύνουμε ασκήσεις και να εξηγούμε στον πίνακα και στο τετράδιο;

Μ6: Όχι εδώ στον υπολογιστή έχει πιο πολύ ενδιαφέρον το μάθημα, γιατί έχεις και μια σιγουριά άμα είναι σωστό αυτό που έχεις κάνει.

Δ: Μ3, τι είναι αυτό που σου αρέσει περισσότερο, όταν λύνεις ασκήσεις με ισοδύναμα κλάσματα εδώ στον υπολογιστή;

Μ3: Να πειραματίζομαι με τα κλάσματα, να τους αλλάζω τον παρονομαστή και τον αριθμητή, να τα λύνω και μετά να βλέπω αν είναι σωστά ή λάθος, για να καταλαβαίνω ποια είναι τα λάθη μου και να τα καταλαβαίνω πιο πολύ.

Δ: Μ1, σου φαίνεται εύκολη η χρήση του προγράμματος και οι δραστηριότητες που κάναμε με αυτό;

Μ1: Ναι, ήταν πάρα πολύ εύκολη. Συνεργαστήκαμε και στο συγκεκριμένο μάθημα, μαζί όλοι, οι ομάδες.

Δ: Για σένα το μάθημα έχει το ίδιο ενδιαφέρον, όταν το κάνουμε στον πίνακα και στο τετράδιο και το ίδιο με το πρόγραμμα αυτό το συγκεκριμένο;

M1: Όχι, γιατί στον πίνακα δεν είναι τόσο εύκολο να τα σχεδιάσεις όλα αυτά, ενώ εδώ στον υπολογιστή, με το που μπαίνεις στο μάθημα στο συγκεκριμένο πρόγραμμα είναι ήδη έτοιμα. Άρα, δε χάνεις και χρόνο.

Δ: Βοηθάνε οι αναπαραστάσεις του προγράμματος στο να καταλαβαίνουμε τα κλάσματα;

M1: Ναι.

Δ: Αν τα λέγαμε με πράξεις, χωρίς μοντέλα και σχήματα;

M1: Όχι, θα έπρεπε να μετακινήσεις και να δοκιμάσεις στο μοντέλο.

Δ: M7, σε βοηθάει η εικόνα να καταλάβεις ή μόνο με πράξεις στο τετράδιο θα μπορούσες να καταλάβεις;

M7: Όχι, γιατί την εικόνα τη βλέπεις και σε βοηθάει.

Δ: M4, σε βοηθάει η εικόνα που βλέπεις στην οθόνη στο να κατανοήσεις και να λύσεις ή μόνο με κανόνες και αριθμούς θα μπορούσες το ίδιο να καταλάβεις τι σου λέει η άσκηση;

M4: Προσωπικά, πιστεύω ότι στον υπολογιστή μπορείς να καταλάβεις περισσότερο, επειδή είναι φωτεινή η οθόνη και σε τραβάει κι έχει πολλές εικόνες.

Δ: Το μάθημα, M2, έχει το ίδιο ενδιαφέρον για σένα, όταν το κάνουμε στην τάξη (πίνακας, διδασκαλία προφορική και τετράδιο) και το ίδιο με τον υπολογιστή;

M2: Νομίζω πως όχι, γιατί στον υπολογιστή εσύ τα κάνεις. Δεν τα κάνει κάποιος άλλος, για να μάθεις εσύ. Εσύ τα κάνεις, για να μάθεις εσύ και είναι και πιο ενδιαφέρον, επειδή είναι σε έναν υπολογιστή. Και οι περισσότεροι ελκύονται απ' αυτό.

Δ: Άρα και εσύ ελκύεσαι;

M2: Ναι.

Δ: Άρα δεν προσπαθεί κάποιος να σου τα πει και να τα καταλάβεις όπως τα θέλει εκείνος, αλλά..;

M2: Όπως τα θέλεις εσύ.

Δ: M10, είναι εύκολη η χρήση του προγράμματος; Σου φαίνεται εύκολη;

M10: Ναι, γιατί σου δείχνει τα μοντέλα που μπορείς να καταλάβεις τα κλάσματα και επίσης μπορείς...

Δ: Βοηθάει η εικόνα;

M10: Ναι.

Δ: Θα ήταν το ίδιο εύκολο αν το κάναμε στην τάξη, λέγοντας μόνο κανόνες και πράξεις;

M10: Όχι, εδώ είναι πιο εύκολο θεωρώ.

Δ: M9, σε βοήθησε το σημερινό πρόγραμμα να καταλάβεις τα ισοδύναμα κλάσματα; Αν δεν είχαμε κάνει μάθημα στην τάξη, θα μπορούσες να τα καταλάβεις με το πρόγραμμα μόνο;

M9: Μπορούμε να τα κάνουμε στην τάξη και μετά στον υπολογιστή.

Δ: Τι είναι αυτό που έχει ενδιαφέρον στο πρόγραμμα; Τι σου αρέσει περισσότερο απ' όλα;
M9: Ότι δεν είναι ανάγκη να σχεδιάζεις τα μοντέλα, τα έχει έτοιμα κι εσύ απλά βάζεις μια κουκκίδα εκεί που πρέπει.

Δ: Καταλαβαίνεις την άσκηση που σου παρουσιάζει κάθε φορά; Είναι αναλυτικό;

M9: Στην αρχή, μπορεί να μην το καταλάβω, γιατί είναι στα αγγλικά, αλλά μετά το καταλαβαίνουμε.

Δ: Άρα η όποια δυσκολία είναι λόγω γλώσσας;

M9: Ναι.

Δ: M7, τι σου έκανε περισσότερο εντύπωση στο πρόγραμμα;

M7: Ποια άσκηση εννοείτε;

Δ: Όχι, μόνο, γενικότερα στο πρόγραμμα, τι είναι αυτό που σου έκανε εντύπωση;

M7: Εκτός από τις εικόνες που τις δείχνει ακριβώς, όλα τα άλλα θα μπορούσαμε να τα κάνουμε και στον πίνακα.

Δ: Άρα είναι ασκήσεις που έχουμε κάνει ήδη;

M7: Ναι.

Δ: Θα ήθελες να χρησιμοποιήσεις παρόμοιο πρόγραμμα και σε άλλα μαθήματα;

M7: Ναι.

Δ: Νομίζεις πως θα σε βοηθούσε να το κατανοήσεις και να καταλάβεις το μάθημα καλύτερα; Ή είναι το ίδιο, να δουλεύεις με τον τρόπο που έχεις μάθει να εργάζεσαι;

M7: Έχω μάθει, αλλά σε βοηθάει και αυτό.

M2: Εδώ μπορώ να δοκιμάσω πολλά κλάσματα και μπορούν να δοκιμάσουν όλοι, ένας τη φορά. Και ο M9 έχει κάνει πολλές φορές, και ο M10 έχει κάνει πολλές και εγώ έχω κάνει πολλές ασκήσεις. Στο τέλος, βγάζει και την επιβεβαίωση.

B' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: M9, σας βοηθάει να συνεργαστείτε και να ανταλλάξετε απόψεις, να δουλέψετε ως ομάδα;

M9: Ναι, γιατί μες στην τάξη δεν μπορείς και πολύ να μιλάς, γιατί είναι πολλά άτομα. Οπότε αν μιλάνε όλοι ψιθυριστά, δε θα ακούγεται τίποτα. Οπότε δε θα μπορείς να μιλάς και πολύ στην τάξη. Ενώ εδώ μπορείς να μιλάς, γιατί είναι πιο λίγα άτομα και ακούγεται πολλή φασαρία.

Δ: M2, βοηθάει το πρόγραμμα αυτό τη συνεργασία μεταξύ σας ως ομάδα ή δουλεύετε ατομικά μόνο;

M2: Δεν ξέρω, και το ένα και το άλλο. Δηλαδή έχουμε ένα φυλλάδιο, ο ένας λέει τις απαντήσεις, ο άλλος τις γράφει στον υπολογιστή και ο άλλος στο χαρτί, οπότε, ναι, είναι καλύτερο. Οπότε μοιράζουμε κάπως τους ρόλους.

Δ: Η δασκάλα σάς αφήνει να μιλάτε την ώρα που δουλεύετε ομαδικά;

M2: Εσείς θα μου πείτε. (Γελάει). Εντάξει, ναι μας αφήνει, αλλά δε νομίζω ότι υπάρχουν και περιθώρια πολλά για να μιλάς.

Δ: Θα προτιμούσες να μη μιλάγατε δηλαδή μεταξύ σας;

M2: Θέλω να πω ότι δε σου κάνει να μιλάς εκείνη την ώρα, γιατί έχεις αλλού το ενδιαφέρον, ενώ στην τάξη δεν έχει και πολύ ενδιαφέρον (γελάει). Εδώ μιλάμε, αλλά όχι πολύ, μιλάμε περισσότερο για το μάθημα.

Δ: M1, βοηθάει το πρόγραμμα να συνεργαστείτε;

M1: Ναι, δουλεύουμε όλοι μαζί. Χωρίζουμε πρώτα τους ρόλους, αλλά και ανταλλάσσουμε τους ρόλους, λέμε ο καθένας την άποψή του. Μιλάμε, λέμε τις απαντήσεις όλοι μαζί και ύστερα το γράφουμε και βλέπουμε αν είναι σωστό.

Δ: M3, σου αρέσει να δουλεύετε ομαδικά ή προτιμάς τον ατομικό τρόπο εργασίας, όπως στην τάξη ο καθένας μόνος του, στο δικό του τετράδιο να λύνει τις ασκήσεις;

M3: Μου αρέσει να δουλεύουμε ομαδικά, αλλά είναι κάποιες ασκήσεις που θα ήταν καλύτερα να τις κάνει ο καθένας μόνος του, για να δούμε και τι ξέρει ο καθένας μόνος του. Για να μην του τα λύνουν όλα οι άλλοι, γιατί μπορεί να είναι μια ομάδα και να συνεργάζονται και να λέει μόνο ένας τις απαντήσεις

Δ: Άρα ως ομάδα τι πρέπει να μάθουμε;

M3: Να μάθουμε να συνεργαζόμαστε και να μιλάμε όλοι.

Δ: Ο υπολογιστής δίνει τη δυνατότητα, όμως κι εμείς πρέπει να ακολουθούμε τους...;

M3: ...κανόνες.

Δ: M7, είναι ίδιος ο τρόπος εργασίας εδώ που είστε μια ομάδα; Μιλήσατε, ανταλλάξατε απόψεις; Ή ο ένας μιλούσε και ο άλλος άκουγε και ακολουθούσε;

M7: Δουλέψαμε όλες μαζί, αν και μερικές φορές η M4 έκανε τις περισσότερες φορές και εγώ της έλεγα: « Δώσε και λίγο στη M5», «Δώσε και λίγο σε μένα».

Δ: Μπορέσατε να συνεργαστείτε;

M7: Ναι.

Δ: M5, συνεργάστηκες με τα κορίτσια της ομάδας σου; Συμμετείχες στην ομάδα;

M5: Ναι, τις κάναμε μαζί τις εργασίες και λίγο παραπάνω η M4 έκανε τις ασκήσεις.

Δ: Αν ήθελες να κάνεις κάποια άσκηση στο πρόγραμμα μπορούσες ή υπήρχε απαγόρευση και δε σε άφηναν;

M5: Μπορούσα.

Γ' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Ποιος είναι ο ρόλος του δασκάλου;

Στην τάξη ο δάσκαλος είναι πάντα μπροστά και σου λέει πάντα πώς πρέπει να προχωρήσεις, με αυτό ή τον άλλον τρόπο. Εδώ ποιος είναι ο ρόλος της δασκάλας; Είναι συνέχεια μπροστά; Σας βοήθησε να καταλάβετε το πρόγραμμα; Είχατε τη δυνατότητα και μόνοι σας κάποια στιγμή ως ομάδα να δουλέψετε; Ή ήταν πάντα μπροστά η δασκάλα και είχε τον πρώτο λόγο; M3: Η δασκάλα δε χρειάζεται να είναι πάντα μπροστά. Εξάλλου το πρόγραμμα είναι για παιδιά, μπορούν να το χρησιμοποιήσουν παιδιά και μόνο τους. Οπότε δε χρειάζεται βοήθεια συνεχής και να είναι η δασκάλα από πάνω σου και να σου λέει τι πρέπει να κάνεις. Μπορείς να το βρεις με την συνεργασία στην ομάδα.

Δ: M1, σας εξηγούσε η δασκάλα τα βήματα, κάτι που ίσως χρειαζόταν εξήγηση;

M1: Ναι, σε μάθημα πρώτα τι κάνουμε και πώς και μας έδωσε και σαν συμβουλή πώς μετακινούμε κάποια κουμπιά.

Δ: M6, ήταν η δασκάλα διαθέσιμη, μπορούσε να σας βοηθήσει αν χρειαζόταν, αν κάτι δεν καταλαβαίνατε εδώ στο πρόγραμμα;

M6: Ναι, πάντα μας βοηθούσε ειδικά στην τάξη, αλλά εδώ, ναι, μας βοηθούσε κι εδώ αλλά όχι και τόσο. Απλά έχει επιλέξει πριν τις σωστές δραστηριότητες.

Δ' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Θα θέλατε να χρησιμοποιήσετε το πρόγραμμα και σε άλλες ενότητες των κλασμάτων και των μαθηματικών γενικότερα;

M7: Ναι, γιατί βοηθάει.

M4: Ναι, γιατί σε βοηθάει να κατανοήσεις περισσότερο. Για παράδειγμα, στον πίνακα άμα θέλεις να πεις κάτι, μπορεί και ο άλλος να έχει σηκώσει χέρι και η κυρία να πει τον άλλον. Ενώ εδώ μπορείς να πεις την άποψή σου άμεσα.

Δ: M5, θα ήθελες να χρησιμοποιήσεις και σε άλλα μαθήματα το ίδιο πρόγραμμα ή παρόμοια με αυτό προγράμματα;

M5: Θα ήθελα, γιατί είναι πιο εύκολο να κάνεις τις ασκήσεις με το πρόγραμμα και να τα μαθαίνεις πιο εύκολα.

Δ: Θα θέλατε να χρησιμοποιήσετε το πρόγραμμα αυτό και σε άλλες ενότητες των κλασμάτων;

M2: Εγώ θα ήθελα να χρησιμοποιώ τους υπολογιστές και γι' άλλα μαθήματα, όχι μόνο για τα κλάσματα... και για άλλες ενότητες των κλασμάτων και γι' άλλα μαθήματα.

Δ: M10, θα ήθελες να το χρησιμοποιήσεις και σε άλλα μαθήματα;

M10: Θα ήθελα στην Ιστορία, σε κάθε μάθημα, να είχε ένα βίντεο με αυτά που κάνανε αντί να τα διαβάζουμε, να τα βλέπουμε στο βίντεο και ίσως να μας έμενε καλύτερα.

Δ' συνάντηση

Α΄ ΑΞΟΝΑΣ

Δ: M9, πώς σου φαίνεται η χρήση του προγράμματος, όσον αφορά τις σημερινές ασκήσεις που κάναμε για τη σύγκριση κλασμάτων;

M9: Ε, μου φάνηκε ωραίο με τα σχήματα και τα μοντέλα και ήταν και εύκολο, γιατί στο έδειχνε έτοιμο το μοντέλο και μπορούσες να αλλάξεις και κλάσματα. Και ωραίο ήταν, εντάξει.

Δ: M10, σε βοήθησε το πρόγραμμα αυτό σήμερα να καταλάβεις το κεφάλαιο με τη σύγκριση των κλασμάτων;

M10: Να πω την αλήθεια, το είχα καταλάβει και απλά με εντυπωσίασαν οι αλλαγές που έκανε στα σχήματα.

Δ: M5, τι σου έκανε περισσότερο εντύπωση σήμερα στο πρόγραμμα στη σύγκριση των κλασμάτων;

M5: Ε, μου έκανε εντύπωση που τα σχήματα κουνιούνται και ήταν και πιο εύκολο από το βιβλίο. Γιατί η κυρία αναγκάζεται να τα γράφει στον πίνακα και δεν είναι και πολύ εύκολο.

Δ: M6, το μάθημα έχει το ίδιο ενδιαφέρον, όταν χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα στη σύγκριση κλασμάτων και το ίδιο όταν το κάνουμε στην τάξη με πίνακα και τετράδιο;

M6: Στην τάξη είναι λίγο πιο βαρετό, ενώ εδώ διασκεδάζεις κιόλας, είναι ομαδικό.

Δ: Άρα, έχει περισσότερο ή λιγότερο ενδιαφέρον;

M6: Πιο πολύ.

Δ: M2, τι είναι αυτό που σου αρέσει, όταν κάνεις ασκήσεις με το πρόγραμμα αυτό;

M2: Λοιπόν, μου αρέσει που δε δουλεύει μόνο η δασκάλα στον πίνακα, δουλεύεις κι εσύ.

Δ: M1, σου φαίνεται εύκολη η χρήση του προγράμματος σήμερα που κάναμε τη σύγκριση των κλασμάτων;

M1: Ναι, είναι πιο εύκολη η χρήση του, γιατί μπορούσαμε να μετακινήσουμε και τα κλάσματα.

Δ: Δοκίμασες διάφορα κλάσματα ή ασχολήθηκες μόνο με μια περίπτωση;

M1: Δοκίμασα διάφορα κλάσματα.

Δ: M7, τι είναι αυτό που σου άρεσε περισσότερο σήμερα που κάναμε τη σύγκριση των κλασμάτων με το πρόγραμμα αυτό; Σου άρεσε κάτι ιδιαίτερα;

M7: Όλες οι ασκήσεις ήταν το ίδιο.

Δ: Ποιο χαρακτηριστικό είχαν;

M7: Μου άρεσε που είχαν και χρώμα.

Δ: M8, σήμερα είναι η πρώτη σου επαφή με το πρόγραμμα.

Το μάθημα, όπως το είδαμε σήμερα, έχει το ίδιο ενδιαφέρον όταν ασχολείσαι με τον υπολογιστή και χρησιμοποιείς ένα ψηφιακό πρόγραμμα και το ίδιο όταν είμαστε στην τάξη και λύνουμε ασκήσεις στον πίνακα;

M8: Όχι, σε αυτό μπορείς να κάνεις παραπάνω πράγματα, ενώ στον πίνακα δεν μπορείς να κάνεις τα ίδια. Έχει μεγάλη διαφορά το ότι χρησιμοποιείς το κομπιούτερ, αντί να ζωγραφίζεις στον πίνακα και είναι πιο διασκεδαστικό και ωραίο.

Δ: M4, τι σου έκανε περισσότερο εντύπωση σήμερα που λύσατε εργασίες σύγκρισης κλασμάτων στο πρόγραμμα Geogebra;

M4: Μου έκανε εντύπωση που είχαμε και μοντέλα, κάποιες φορές περισσότερα από ένα μοντέλο και αυτό σε βοηθούσε ως προς το να καταλάβεις. Δηλαδή ό,τι απορίες είχες τις καταλάβαινες.

B' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Σας βοήθησε να συνεργαστείτε;

M8: Ναι, κάποιος χρησιμοποιούσε το κομπιούτερ, κάποιος έγραφε στο φυλλάδιο.

Δ: M7, ανταλλάξατε απόψεις την ώρα που λύνατε τις ασκήσεις στο πρόγραμμα;

M7: Ναι.

Δ: Ή μιλούσε μόνο ένας και οι άλλοι απλώς άκουγαν;

M7: Λέγαμε όλοι και ό,τι πιστεύαμε πως ήταν σωστό το γράφαμε.

Δ: Άρα υπήρχε ομαδική δουλειά, συνεργασία;

M7: Ναι.

Δ: Στην τάξη, M4, μπορείτε να μιλάτε και να συνεργάζεστε, να δουλεύετε ομαδικά, όταν λύνετε ασκήσεις; Ή είναι ο τρόπος πιο πολύ ατομικός;

M4: Δεν μπορούμε στην τάξη να μιλάμε για να λύνουμε ασκήσεις, διότι μπορεί να ενοχλούμε και τα άλλα παιδιά κι εμείς να μη συζητάμε καν για το μάθημα.

Δ: Σας βοήθησε να συνεργαστείτε το πρόγραμμα σήμερα, να ανταλλάξετε απόψεις; Ή δουλέψατε ατομικά η καθεμιά μόνη της;

M2: Μας βοήθησε και είμαστε όλες μαζί και το κάναμε αυτό.

Δ: Μοιράζατε τους ρόλους;

Όλες μαζί της ομάδας: Ναι.

M1: Σε κάθε φυλλάδιο εργασίας, η μια έγραφε, η άλλη μετακινούσε τα κλάσματα στο πρόγραμμα.

Δ: M6, ο τρόπος δουλειάς είναι ο ίδιος εδώ και ο ίδιος στην τάξη;

M6: Εδώ είναι πιο εύκολος ο τρόπος.

Δ: Είναι ίδιος ο τρόπος δουλειάς ως προς την ομαδικότητα;

M6: Εδώ είμαστε πιο ομαδικά, ενώ στην τάξη δεν πρέπει να κάνουμε και φασαρία. Οπότε δεν είναι και τόσο ομαδικά στην τάξη.

Δ: Άρα στην τάξη δεν μπορείτε να μιλάτε πολύ;

M6: Ναι.

Δ: M8, τη στιγμή που δυσκολευτήκατε σας βοήθησε η ομάδα σας να ξεπεράσετε τη δυσκολία;

M8: Ναι, όταν κάποιο παιδάκι μπορεί να μπερδευτεί, μπορεί να του πει ο άλλος τον τρόπο, να τον βοηθήσει. Τα έχει εδώ και αναλυτικά οπότε θα το καταλάβει.

Δ: M7, τη στιγμή που δυσκολεύτηκες σε βοήθησε η ομάδα σου να ξεπεράσεις τη δυσκολία;

M7: Ναι, μου το εξήγησε καλύτερα και το κατάλαβα.

Δ: M1, η ομάδα σου σε βοήθησε, σε υποστήριξε στις εργασίες, όταν δυσκολεύτηκες;

M1: Ναι, τα κάναμε όλοι μαζί και βοηθήμασταν. Λέγαμε όλοι μας τη γνώμη, τι προτείνει ο καθένας να κάνουμε στις πράξεις και βρίσκαμε το αποτέλεσμα.

Γ' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Ποιος είναι ο ρόλος της δασκάλας; Είναι ο ίδιος, M10, στην τάξη και το ίδιο εδώ; Δηλαδή είναι πάντα μπροστά; Εξηγεί πάντα; Ή έχετε τη δυνατότητα και μόνοι σας να ψάξετε και να εργαστείτε;

M10: Η δασκάλα κάνει μάθημα στην τάξη και όταν ερχόμαστε εδώ μας κάνει μάθημα ο υπολογιστής. Η δασκάλα μας εξηγεί απλά τι πρέπει να κάνουμε.

M9: Στην τάξη η δασκάλα μάς λέει τις ασκήσεις, μας εξηγεί τη θεωρία, ενώ εδώ είναι ο υπολογιστής, αλλά μας εξηγεί τι πρέπει να κάνουμε.

Δ: Άρα ο υπολογιστής δουλεύει ως εργαλείο υποστήριξης;

M9: Ναι.

Δ: M5, πες μας τη γνώμη σου σχετικά με τον ρόλο της δασκάλας.

M5: Εγώ πιστεύω ότι και τα δύο είναι καλά, αλλά το βιβλίο είναι καλύτερο, γιατί μας λέει και μας εξηγεί τη θεωρία και...

Δ: Άρα ξεκινάμε από το βιβλίο;

M5: Ναι και μετά να....

Δ: Μένουμε μόνο στο βιβλίο;

M5: Όχι, απλά πρώτα πρέπει να τα εξηγούμε στην τάξη και μετά να ερχόμαστε εδώ στο πρόγραμμα.

Δ: M6, οι εργασίες που επέλεξε η δασκάλα στο πρόγραμμα αυτό σήμερα σου φάνηκαν εύκολες ή δύσκολες;

M6: μου φάνηκαν εύκολες, γιατί είχανε και χρώμα και σχέδια, καταλαβαίναμε πιο εύκολα.

Δ: Θα προτιμούσες, M2, πιο δύσκολες εργασίες;

M2: Όχι, όχι μια χαρά είναι κι αυτές.

Δ: Δηλαδή θεωρείς ότι ο σκοπός έγινε, υλοποιήθηκε;

M2: Ναι, καταλαβαίνεις καλύτερα, γιατί είσαι σε υπολογιστή και καταλαβαίνεις περισσότερο.

Δ: Με ποιον τρόπο προτιμάς, M8, να δουλεύουμε τα Μαθηματικά; Με το βιβλίο μόνο ως εργαλείο ή και με τον υπολογιστή;

M8: Και με τα δύο. Να τα εξηγούμε λίγο στην τάξη και μετά να ερχόμαστε εδώ να βλέπουμε, για να τα καταλαβαίνουμε πιο πολύ.

Δ: Προτιμάτε να δουλεύουμε μόνο στην τάξη ή να έχουμε συνδυαστικά κι ένα εργαλείο ψηφιακό, όπως αυτό το πρόγραμμα, για τα κλάσματα και τα Μαθηματικά γενικότερα;

M1: Όπως αυτό το πρόγραμμα.

M2: Ναι, είναι τέλειο.

M9: Συνδυαστικά για να τα εμπεδώσουμε.

M10: Εγώ θεωρώ και τα δύο είναι καλά. Όταν λύνεις μια άσκηση, χρειάζεται ο υπολογιστής για να σου μείνει το σχήμα που έδειχνε ο υπολογιστής και στην τάξη, για να καταλάβουμε τη θεωρία.

Δ: M5, ποια είναι η γνώμη σου σχετικά με την ερώτηση;

M5: Εγώ πιστεύω απλώς στον υπολογιστή είναι πιο εύκολα. Αλλά το ίδιο είναι και στο βιβλίο, απλώς μας δείχνει τη θεωρία κι έτσι τη μαθαίνουμε πιο καλά, για να λύσουμε μετά εργασίες στον υπολογιστή.

Δ' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Μοιάζουν τα μαθηματικά, M10, όπως τα κάνουμε εδώ με τα μαθηματικά όπως τα κάνουμε στην τάξη;

M10: Δε μοιάζουν και πολύ. Στην τάξη είμαστε συνέχεια στον πίνακα και λύνουμε ασκήσεις, ενώ εδώ μας τις λύνεις και τις δείχνει αυτόματα, πατώντας ένα κουμπί μόνο.

Δ: M5, μοιάζουν τα μαθηματικά όπως τα κάνουμε εδώ με τα μαθηματικά όπως τα κάνουμε στην τάξη;

M5: Όχι, δε μοιάζουν, γιατί ο υπολογιστής δεν είναι σαν το βιβλίο ούτε το βιβλίο σαν τον υπολογιστή. Στον υπολογιστή είναι λίγο πιο εύκολο και στο βιβλίο είναι λίγο πιο δύσκολο. Εδώ τις λύνεις γρήγορα τις ασκήσεις.

Δ: Σε φοβίζουν τα μαθηματικά εδώ όταν τα βλέπεις στον υπολογιστή;

M5: Όχι, μόνο άμα είναι δύσκολες πολύ οι ασκήσεις, αλλά δεν είναι και τόσο δύσκολες.

Δ: Στην τάξη σου φαίνονται πιο δύσκολα τα μαθηματικά;

M5: Ναι.

Δ: M1, στην τάξη τα μαθηματικά σου φαίνονται πιο δύσκολα ή πιο εύκολα απ' ό,τι εδώ;

M1: Στην τάξη είναι λίγο πιο δύσκολα, αν και πρώτα πρέπει λίγο να καταλάβεις τι κάνεις. Αλλά εδώ σε βοηθάει πιο πολύ, γιατί σου έχει ήδη από μόνο του τα κλάσματα, έχει και αριθμογραμμές που σε βοηθάνε.

Δ: M8, τα μαθηματικά σου φαίνονται πιο δύσκολα στην τάξη ή εδώ;

M8: Στην τάξη φαίνονται πιο πολύ δύσκολα, γιατί εδώ τα εξηγεί, τα έχει πιο αναλυτικά, έχει χρώματα, έχει σχήματα, οπότε μπορείς να τα καταλάβεις λίγο πιο εύκολα, γιατί δεν μπορείς να κάνεις και τα ίδια πράγματα στον πίνακα.

Δ: M4, σου φαίνονται πιο εύκολα ή πιο δύσκολα τα μαθηματικά εδώ;

M4: Μου φαίνονται πιο εύκολα, γιατί στην τάξη μπορεί να μην προσέχεις κάποια στιγμή και να το χάσεις όλο. Ενώ εδώ προσέχεις, δε γίνεται.

M8: Σου τραβάει πιο πολύ το ενδιαφέρον να κοιτάξεις.

Δ: M7, σου φαίνονται πιο εύκολα ή πιο δύσκολα τα μαθηματικά εδώ;

M7: Πιο εύκολα για τους ίδιους λόγους.

Δ: M2, θα ήθελες να χρησιμοποιήσεις το πρόγραμμα και σε άλλες ενότητες των κλασμάτων;

M2: Ναι, πάρα πολύ θα το ήθελα, γιατί έτσι είναι το μάθημα και πιο διασκεδαστικό και παρακολουθούν περισσότερο στο μάθημα.

Δ: M7, θα ήθελες να χρησιμοποιήσεις το πρόγραμμα αυτό και σε άλλες ενότητες των μαθηματικών γενικότερα, όχι μόνο των κλασμάτων;

M7: Ναι, γιατί θα με βοήθαγε να καταλάβω πιο καλά.

Δ: M8, εσένα που είναι η πρώτη σου επαφή με το πρόγραμμα αυτό, θα ήθελες να το χρησιμοποιήσεις και σε άλλες ενότητες των Μαθηματικών; Δηλαδή κάθε φορά που κάνουμε το μάθημα στην τάξη, να κάνουμε και ασκήσεις στον υπολογιστή;

M8: Ναι, γιατί ό,τι δεν έχεις καταλάβει, δε σου αφήνει κενό. Τα εξηγεί πιο πολύ στο κομπιούτερ, ενώ στον πίνακα είναι διαφορετικά. Εδώ πέρα πιστεύω δεν αφήνει κανένα κενό, άμα έχεις και παρακολουθήσει.

Δ: Άρα συμπληρώνει αυτό που έχουμε μάθει;

M8: Ναι.

Δ: M4, θα ήθελες να χρησιμοποιήσεις το πρόγραμμα και σε άλλα μαθήματα, όχι μόνο στα μαθηματικά;

M4: Ε ναι, στη Φυσική και στην Ιστορία που μπορεί να είναι λίγο πιο δύσκολα.

Δ: Θεωρείς ότι θα βοηθούσε να συμπληρώσεις τα κενά, τις απορίες σου;

M4: Ναι.

Ατομικές συνεντεύξεις

Α΄ ΑΞΟΝΑΣ

Δ: M1, πώς σου φάνηκε η χρήση του προγράμματος;

M1: Η χρήση του προγράμματος μού φάνηκε εύκολη, γιατί κουνάς αριθμογραμμές, επιλέγεις τον αριθμό εσύ και σου τον δείχνει και στην αριθμογραμμή και είναι εύκολο να την καταλάβεις από την αρχή.

Δ: Πολύ ωραία! M9;

M9: Με βοήθησε να σιγουρευτώ για κάποια πράγματα που δεν ήμουν ακόμα πιο σίγουρος. Και μπορείς να παίζεις κιάλας κάποιες φορές και είναι ωραίο, εντάξει.

Δ: M10;

M10: Θεωρώ πως είναι ένα διασκεδαστικό πρόγραμμα και ωραίο, επειδή μπορούσες εσύ να χειριστείς τα κλάσματα και να κάνεις αυτό που ήθελες εσύ.

Δ: Πολύ ωραία!

Σε βοήθησε το πρόγραμμα να καταλάβεις τα κλάσματα;

M1: Ναι, με βοήθησε πολύ να καταλάβω από την αρχή τα κλάσματα εεε....

M9: Κατάλαβα πιο πολύ και τις αριθμογραμμές και τα σχήματα, επειδή με μπέρδευαν στο βιβλίο όπως τα έδειχνε. Αλλά με τα σχήματα που είχε το πρόγραμμα και έτσι όπως τα έδειχνε βήμα βήμα τα κατάλαβα, ναι.

Δ: M10;

M10: Εε, ναι, τα κατάλαβα περισσότερο τα κλάσματα με τη βοήθεια των σχημάτων και των αριθμογραμμών που είχε.

Δ: Τι σου έκανε περισσότερο εντύπωση στο πρόγραμμα αυτό;

M1: Πιο πολύ μου έκανε εντύπωση ότι το καταλάβαινες από την ώρα που έμπαινες, δηλαδή σου ζηταγε τη λύση κι έπρεπε να τη βρεις με λίγα λόγια παίζοντας.

Δ: M9, τι σου έκανε πιο πολύ εντύπωση;

M9: Ότι μπορούσες να μετακινείς τα κλάσματα και τα σχήματα πιο εύκολα και ότι στα είχε βήμα βήμα που είναι πιο εύκολο έτσι να τα καταλάβεις

M10: Μου έκανε πιο πολύ εντύπωση από το πρόγραμμα η άσκηση που εσύ έπρεπε να βάλεις τα κλάσματα στην αριθμογραμμή.

Δ: Το μάθημα είχε το ίδιο ενδιαφέρον με το πρόγραμμα και το ίδιο χωρίς αυτό, με τον παραδοσιακό τρόπο στην τάξη;

M1: Όχι, γιατί στο βιβλίο έχει τις ασκήσεις κατευθείαν κι ενώ σου λέει λίγο τι να κάνεις, πώς είναι η άσκηση, μετά ζητάει κατευθείαν τη λύση, πρέπει να την κάνεις. Ενώ στο

πρόγραμμα αυτό στον υπολογιστή έδειχνε ότι μπορείς να τα μετακινήσεις, να παίζεις πιο πολύ.

M9: Στο μάθημα είναι πιο δύσκολο να γίνει, επειδή είμαστε πιο πολλά άτομα και μπορούμε να κάνουμε κάποια πράγματα πιο αργά, επειδή πρέπει να περιμένουμε όλοι να τελειώσουν, και τα άλλα παιδιά να γράψουν, και δεν προχωράμε μόνοι μας. Και κάποιες φορές γίνεται και φασαρία και δεν καταλαβαίνεις, ενώ εδώ είμαστε πιο λίγα άτομα και γίνεται πιο γρήγορα και πιο εύκολα.

Δ: M10, το μάθημα είχε το ίδιο ενδιαφέρον με το πρόγραμμα και το ίδιο, όταν το κάνουμε στην τάξη παραδοσιακά;

Θοδωρής: Το παραδοσιακό μάθημα έχει την ιδιαιτερότητά του, γιατί από κει μαθαίνεις τα βασικά πράγματα. Ενώ το πρόγραμμα σε βοηθάει να τα καταλάβεις περισσότερο.

Δ: Πολύ ωραία! Σας φάνηκε εύκολη η χρήση του;

M1: Ναι, ήταν εύκολη. Την καταλαβαίνεις από την πρώτη στιγμή που μπαίνεις στο πρόγραμμα.

M9: Είναι εύκολη, επειδή σου τα έχει σχεδόν έτοιμα. Εσύ απλά ρύθμιζες, απλά έγγραφες και ρύθμιζες τα κλάσματα

M10: Ναι, ήταν εύκολη, γιατί σχεδόν είχε τη λύση κι εσύ απλά έπρεπε να βρεις το κενό που έλειπε ή κάτι διαφορετικό.

Δ: Θα μπορούσαμε να κάνουμε μαθηματικά μόνο με το πρόγραμμα, χωρίς να έχει προηγηθεί το μάθημα στην τάξη; Ή θα μπορούσαμε ταυτόχρονα και να εξηγούμε τα κλάσματα και να λύνουμε εργασίες στον υπολογιστή;

M1: Δε θα ήταν τόσο δύσκολο. Βέβαια, καλό είναι πρώτα να τα εξηγούμε, αλλά μέσω υπολογιστή μας τα εξήγησε η δασκάλα καλύτερα.

M9: Καλύτερα πρώτα να τα κάνουμε στο βιβλίο, επειδή στον υπολογιστή δεν έχει θεωρία, έχει μόνο ασκήσεις, ενώ στο βιβλίο έχει κυρίως θεωρία και όχι πάρα πολλές ασκήσεις. Οπότε είναι καλύτερα να κάνεις τη θεωρία και μετά να έχεις χρόνο να πηγαίνεις στους υπολογιστές να κάνεις τις ασκήσεις.

M10: Θα μπορούσαμε να έχουμε μισή ώρα να εξηγούμε τη θεωρία πριν πάμε στον υπολογιστή και μετά κατευθείαν για να καταλάβουμε, να πηγαίνουμε στους υπολογιστές.

Δ: Να έχουμε δηλαδή τη δυνατότητα να έχουμε άμεση πρόσβαση στους υπολογιστές;

Όλοι μαζί: Ναι.

B' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Σας βοήθησε να συνεργαστείτε;

M1: Ναι, δηλαδή στο μάθημα ο καθένας τις κάνει μόνος του τις ασκήσεις, ενώ στον υπολογιστή είμαστε όλοι οργανωμένοι και λέμε ο καθένας ότι θα κάνει από κάτι και συνεργαστήκαμε.

Δ: Άρα είναι ομαδική δουλειά ή ατομική με το πρόγραμμα αυτό στον υπολογιστή;

M1: Στον υπολογιστή είναι ομαδική δουλειά.

M9: Ναι, στον υπολογιστή η συνεργασία είναι πιο εύκολη, γιατί στην τάξη αν μιλάνε όλοι, θα γίνει μεγάλη φασαρία, ενώ στον υπολογιστή είμαστε πιο λίγα άτομα και μπορείς πιο εύκολα να μιλάς

Δ: Αν είσαστε πιο πολλοί στον υπολογιστή, είναι εύκολο να είστε σε ομάδες και ο καθένας να συμμετέχει σε μια ομάδα;

M9: Και πάλι θα μπορούσες να συνεργαστείς πιο πολύ στον υπολογιστή.

M10: Στο μάθημα ο καθένας είναι για τον εαυτό του, για να πάρει καλό βαθμό, ενώ στον υπολογιστή δε βαθμολογείται κάτι, οπότε συνεργαζόμαστε πιο εύκολα.

Δ: Άρα έχουμε διαφορά του παραδοσιακού τρόπου μαθήματος με το μάθημα όπου χρησιμοποιείται το ψηφιακό πρόγραμμα και ο υπολογιστής;

Μαθητής: Ναι.

Δ: Ο ρόλος της ομάδας είναι σημαντικός στο πρόγραμμα αυτό; Σας βοηθάει η ομάδα σας όταν έχετε μια δυσκολία να ξεπεράσετε τη δυσκολία ή πρέπει πάντα να απευθύνεστε στη δασκάλα;

M1: Βασικά, όλοι μαζί συνεργαζόμαστε και στην ομάδα, αλλά και η δασκάλα μας εξηγεί, αν κάποιος δυσκολεύεται θα μας λύσει την απορία.

Δ: Άρα βοηθάει η δασκάλα όταν χρειαστεί;

M1: Ναι.

M9: Κάποιες φορές, ναι, μας βοηθάνε και οι συμμαθητές, άμα δεν ξέρουμε κάτι από τον υπολογιστή. Η δασκάλα, όμως, μπορεί να μας το πει καλύτερα και να το καταλάβουμε πιο εύκολα.

M10: Εμείς συμπληρώναμε τις απόψεις και όποια θεωρούσαμε πως είναι η σωστή, τη γράφαμε.

Δ: Πολύ ωραία! Θα θέλατε να δουλεύετε και στην τάξη ομαδικά, όπως με το πρόγραμμα αυτό, ή σας αρέσει ο ατομικός τρόπος διδασκαλίας; Θα θέλατε να υπάρχει μια αλλαγή στον τρόπο εργασίας μέσα στην τάξη;

M1: Βασικά, θα ήταν ωραίο να υπήρχαν υπολογιστές και προγράμματα σχετικά με το μάθημα και να είμαστε και χωρισμένοι σε ομάδουλες.

Δ: Θα ήθελες, M1, να αλλάξει ο τρόπος εργασίας; Να εμπλουτιστεί το μάθημα με υπολογιστές;

M1: Ναι, στο μέλλον.

M9: Θα μπορούσαμε να κάνουμε κάποιες ασκήσεις ομαδικές και σε άλλα μαθήματα, αλλά στην τάξη δεν μπορούμε, γιατί είμαστε πολλά παιδιά και δε γίνεται να μιλάμε όλοι μαζί, να είμαστε ομαδικά.

Δ: Αν αλλάξει η κατανομή και ρυθμιστεί αλλιώς η τάξη θα μπορούσαμε να δουλέψουμε ομαδικά; Να μπουν υπολογιστές και να χωριστείτε σε ομάδες;

M1: Μικρές ομάδες.

M9: Ναι.

M10: Θα μπορούσαμε να χωριστούμε σε ομάδες των 4 ή 5 ατόμων και μια φορά την εβδομάδα να κάνουμε ομαδική εργασία σε οποιοδήποτε μάθημα.

Δ: Χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή; Ή και χωρίς.

M10: Χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή αλλά και χωρίς. Και χωρίς τον υπολογιστή και με τον υπολογιστή.

Δ: Ποιος ήταν ο δικός σου ρόλος στην ομάδα όταν δουλεύατε με το πρόγραμμα αυτό; Συμμετείχατε δηλαδή ή μιλούσαν κάποιοι και εσείς απλώς ακούγατε;

M1: Το κάθε άτομο είχε τη δικιά του γνώμη και όλοι λέγαμε τη γνώμη μας, τις απορίες μας, συνεργαζόμασταν.

M9: Ο καθένας έκανε μια δουλειά, για παράδειγμα ο ένας έγραφε, ο άλλος έλεγε αν κάναμε λάθος και ο άλλος έγραφε στον υπολογιστή και άλλος στο χαρτί.

Δ: Είχατε μοιράσει τους ρόλους;

M9: Ναι, τους ρόλους.

Γ΄ ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Ποιος ήταν ο ρόλος της δασκάλας με το πρόγραμμα αυτό; Είναι το ίδιο; Δηλαδή στην τάξη η δασκάλα έχει τον πρώτο λόγο, εξηγεί, ρωτάει είναι μπροστά. Στο μάθημα με τον υπολογιστή είναι ο ίδιος ρόλος; Δηλαδή ήταν πάντα μπροστά; Έδινε οδηγίες, θα κάνετε αυτό, θα κάνετε το άλλο, συνέχεια;

M1: Η δασκάλα μας βασικά μας έδινε τις πρώτες συμβουλές τι θα κάνουμε και ύστερα συνεχίζαμε όλοι ομαδικά και τις κάναμε. Ενώ στην τάξη διαβάζουμε λίγο τι πρέπει να κάνουμε στην άσκηση και τη λύνουμε.

M9: Στην τάξη είμαστε πιο πολλά άτομα και κάποιοι μπορεί να μην καταλάβουν. Ενώ εκεί στους υπολογιστές είμαστε πιο λίγα και καταλαβαίνουμε. Έχει και το σχήμα, ήδη, έτοιμο και μπορούμε να το καταλάβουμε.

Δ: Άρα η δασκάλα δεν είναι πάντα μπροστά να λέει πάντα τι πρέπει να κάνετε;

M9: Όχι, μας λέει και συμβουλές τι πρέπει να κάνουμε, αλλά μπορείς να το καταλάβεις μέσα από το πρόγραμμα.

Δ: Πολύ ωραία! M10;

M10: Η δασκάλα στην τάξη έχει τον πρώτο λόγο πάντα, ενώ στον υπολογιστή μας εξηγούσε την κάθε άσκηση κι εμείς προσπαθούσαμε να την κάνουμε μόνοι μας.

Δ: Δοκιμάζατε και άλλα κλάσματα; Παίζατε και λίγο μόνοι σας; Να ξεφύγετε δηλαδή απ' αυτό που σας έλεγε να κάνετε. Είχατε το περιθώριο να δοκιμάσετε και κάτι άλλο;

M10: Ναι.

M1: Ναι, είχαμε τη δυνατότητα να μεταφέρουμε την αριθμογραμμή, ν' αλλάξουμε τα κλάσματα.

Δ: Πολύ ωραία! Είναι κατανοητή η δασκάλα χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα αυτό το ίδιο και όταν διδάσκει στην τάξη χωρίς κάποιο πρόγραμμα ψηφιακό; Ή το πρόγραμμα βοηθάει και τη δασκάλα να γίνει πιο κατανοητή;

M1: Η δασκάλα μάς δίνει από την αρχή συμβουλές, αλλά επειδή τα λέει και το πρόγραμμα για τα κλάσματα, παίρνουμε όλοι ιδέες, και η δασκάλα και εμείς.

M9: Στο βιβλίο η δασκάλα μάς δίνει πιο πολλές οδηγίες, ενώ στον υπολογιστή μπορείς να το καταλάβεις, αν κι εκεί μας δίνει οδηγίες αλλά πιο λίγες και μπορείς να το καταλάβεις.

M10: Στην τάξη το πάνω χέρι το έχει η δασκάλα. Μας εξηγεί, γράφουμε κανόνες στο τετράδιό μας. Ενώ στον υπολογιστή ουσιαστικά μας εξηγεί πώς λειτουργεί αυτό και ο υπολογιστής μετά γίνεται η δασκάλα μας.

Δ' ΑΞΟΝΑΣ

Δ: Μοιάζουν τα μαθηματικά όπως τα διδάσκεστε στην τάξη με τα μαθηματικά μέσα από τη χρήση του συγκεκριμένου προγράμματος; Υπάρχουν ομοιότητες και διαφορές;

M1: Στην τάξη, βασικά, τα μαθηματικά είναι λίγο πιο δύσκολα και από την πρώτη στιγμή δε θα τα καταλάβεις τόσο πολύ. Ενώ στον υπολογιστή πιστεύω, ναι, ότι τα καταλαβαίνεις. Θα υπάρχουν κάποιες απορίες, αλλά τα καταλαβαίνεις. Δηλαδή είναι καλό να μπαίνεις από τον υπολογιστή στα μαθηματικά, για να τα καταλάβεις καλύτερα.

M9: Στο βιβλίο πρέπει να συμπληρώνεις πιο πολλά εσύ και να κάνεις πιο πολλά πράγματα εσύ. Ενώ στο πρόγραμμα αυτό τα σχήματα στα έχει έτοιμα. Ουσιαστικά, εσύ δοκιμάζεις διάφορα μοντέλα και τα λύνεις.

M10: Εγώ θεωρώ πως ο ένας τρόπος συμπληρώνει τον άλλον. Δηλαδή στην τάξη λέμε τη θεωρία και στον υπολογιστή τα καταλαβαίνουμε περισσότερο, γίνονται πιο κατανοητά τα κλάσματα.

Δ: Θα θέλατε να συνεχίσετε να χρησιμοποιείτε το πρόγραμμα Geogebra και σε άλλες ενότητες και των κλασμάτων και των μαθηματικών γενικότερα;

M1: Ναι, πιστεύω ότι θα σε βοηθήσει γενικά να καταλάβεις τα κλάσματα, και όχι μόνο τα κλάσματα. Δηλαδή και προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς και όλα.

M9: Μπορεί να γίνει και σε άλλες ενότητες, σε προσθέσεις, αφαιρέσεις, σε δεκαδικούς, θα μπορούσε να γίνει και σε άλλα μαθήματα, δηλαδή στη Γλώσσα.

M10: Εγώ θα ήθελα να δω στην επόμενη ενότητα πώς θα ήταν το πρόγραμμα και να συγκρίνω με τα κλάσματα.

Δ: Δηλαδή σε κάποια άλλη ενότητα των μαθηματικών;

M10: Ναι.

Δ: Ποιο είναι το διαφορετικό που δίνει η χρήση του προγράμματος σε σχέση με το παραδοσιακό μοντέλο; Τι διαφορετικό σας δίνει; Τι έχει και θεωρείτε πως είναι χρήσιμο και βοηθάει;

M1: Έχει μεγάλη διαφορά, γιατί στον υπολογιστή μπαίνεις κατευθείαν στα κλάσματα, στο πνεύμα των κλασμάτων. Ενώ στο βιβλίο μαθηματικών δεν έχει τόσες συμβουλές, ο υπολογιστής και το πρόγραμμα αυτό έχει περισσότερες συμβουλές και τρόπους να σου δείξει.

M9: Στο βιβλίο έχει πιο πολλές θεωρίες, ενώ στο πρόγραμμα έχει πιο πολλές ασκήσεις. Είναι και τα μοντέλα έτοιμα και εσύ απλά συμπληρώνεις.

M10: Στο μάθημα είναι όλο θεωρίες και πιο σοβαρά τα πράγματα, ενώ στον υπολογιστή είναι λίγο πιο χαλαρά και πιο ομαδικά.

Δ: Είναι πιο διασκεδαστικό;

M10: Ναι.

Δ: Δεν υπάρχει η πίεση του βιβλίου;

M10: Ναι, να τελειώσεις την άσκηση, να προχωρήσεις και μπορεί να πάρεις και κακό βαθμό.

Δ: Άρα είναι ανταγωνιστικό το μάθημα στην τάξη;

M10: Ναι.

Δ: Μπράβο, παιδιά μου! Είστε εξαιρετικοί!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Θεματικοί άξονες, κατηγορίες και υποκατηγορίες αποτελεσμάτων

Θεματικός άξονας	Κατηγορίες	Υποκατηγορίες
1. Εντυπώσεις και εκτιμήσεις των παιδιών από την εφαρμογή του προγράμματος	1.1 Ψυχαγωγία	
	1.2 Χρησιμότητα- Ευχρηστία	
	1.3 Μαθησιακή υποστήριξη	1.3.1 Κατανόηση
		1.3.2 Κατασκευή νοημάτων
2. Συνεργασία και ομαδικότητα		
3. Ο ρόλος του δασκάλου	3.1 Ποιος είναι ο ρόλος του δασκάλου;	
	3.2 Πώς υποστηρίζεται ο ρόλος του δασκάλου μέσα από την εφαρμογή του προγράμματος;	
4. Τα Μαθηματικά μέσα από την υλοποίηση του ψηφιακού προγράμματος και των Νέων Τεχνολογιών	4.1 Σύγκριση με το παραδοσιακό μάθημα	
	4.2 Προτάσεις για μελλοντική εκπαιδευτική χρήση των Νέων Τεχνολογιών	

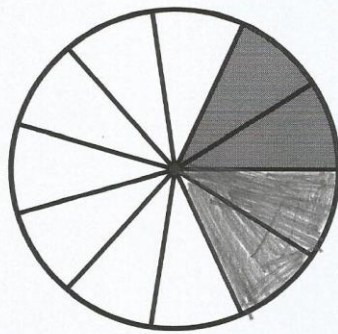
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Φύλλα εργασίας μαθητών

Fraction Models

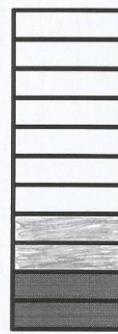


$$\frac{2}{11}$$

Circle Model



$$\frac{4}{11}$$



$$\frac{5}{11}$$

Rectangle Model

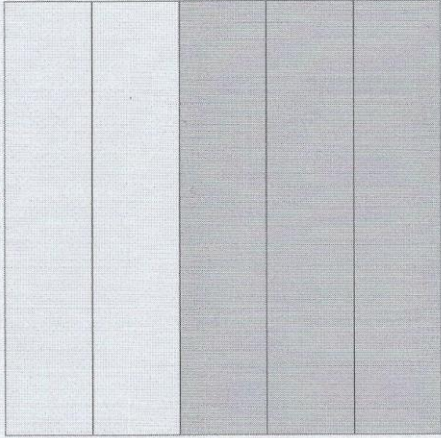
Staff of Education Development Center (EDC)

numerator = 3
 denominator = 5
 model orientation
 subdivisions = 1
 equivalent fraction

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{12}$$



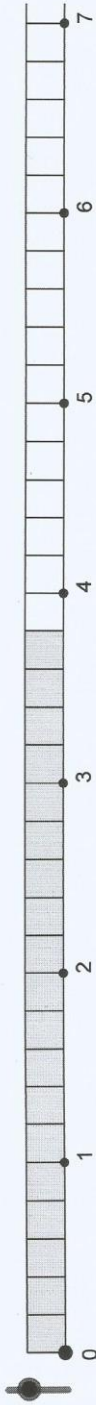
Improper Fraction	Mixed Number
$\frac{19}{5}$	$3\frac{4}{5}$

Numerator

Denominator

$$\frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

$$\frac{31}{6} = 5\frac{1}{6}$$



$$\frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

$$\frac{31}{6} = 5\frac{1}{6}$$

Untitled

Hide fraction

+ +
 - -

^ ^

v v

Show/Hide fraction

↑ ↓

Zoom

Numerator
Denominator

4

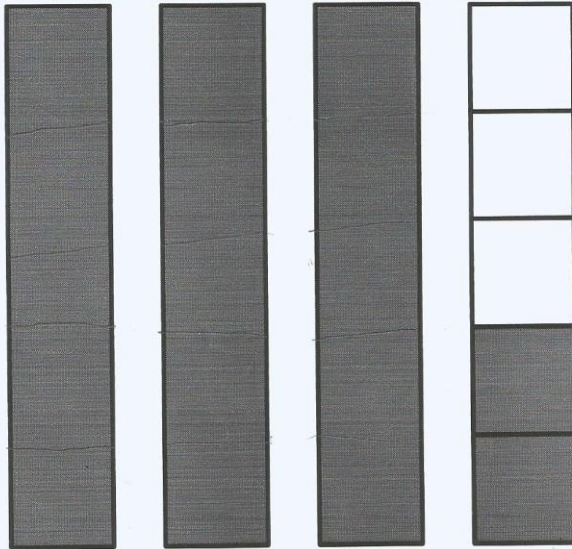
$\frac{4}{2}$



$$4\frac{6}{8} = \frac{38}{8}$$

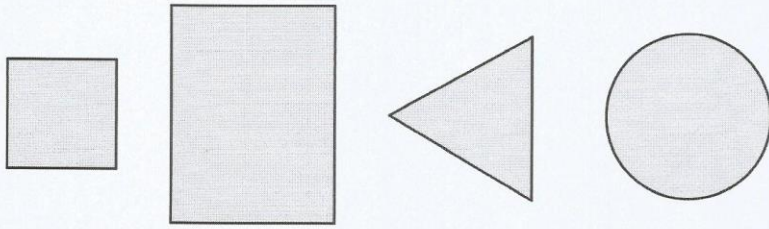
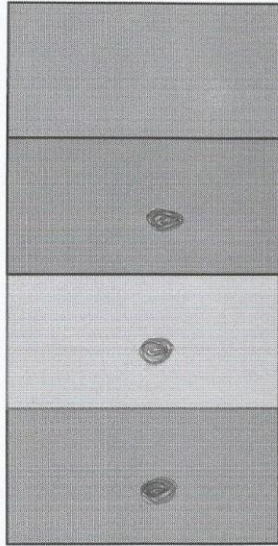
Next

$$3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$$



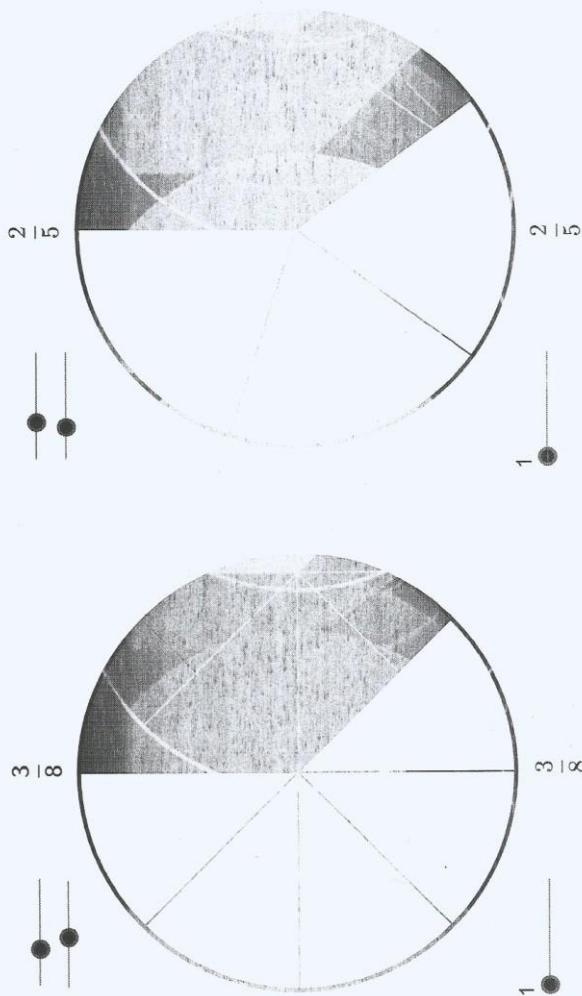
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{5}$
- $\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{7}$
- $\frac{1}{8}$
- $\frac{1}{9}$
- $\frac{1}{10}$

$\frac{3}{4}$



Reset Counters





$$\frac{3}{8}, \frac{2}{5} = \frac{15}{40} < \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

Άρα το $\frac{2}{5}$ περιλαμβάνει και το $\frac{3}{8}$

Equivalent Fractions

 Show Answers

 New

 Easier

$$\frac{1}{6} = \frac{?}{42}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{5}{?}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{?}{40}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{16}{?}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{?}{80}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{12}{?}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{?}{18}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{10}{?}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{?}{60}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{?}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{12}{40}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{7}{28}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{20}{25}$$

Denominator = 4



Show number

$$\frac{2}{4}$$



Apart

Together



$$\frac{2}{6} < \frac{2}{4}$$



Denominator = 6

Show number



12 June 2013

Improper Fractions and Mixed Numbers

Numerator: 9
Denominator: 4

Join the parts

Improper fraction

This fraction is nine quarters

$\frac{9}{4}$

Count Sectors



Mixed number ?

$$\begin{array}{r} 2 \\ 32 \overline{) 30} \\ \underline{-30} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 4 \overline{) 9} \\ \underline{-8} \\ 1 \end{array}$$

$$2 \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10 \overline{) 6} \\ \underline{-10} \\ 4 \end{array}$$

$$1 \frac{1}{6}$$

$$5 \frac{2}{6}$$

This is adapted from Andrew Cree's work at <https://www.geogebra.org/m/asterisk/row/18/1/Jul1P66>

Πηγές Εικόνων

Εικόνα 1-2: Προσωπικό αρχείο.

Εικόνα 3: Σχολικό εγχειρίδιο μαθηματικών Ε΄ τάξης, βιβλίο μαθητή.

Εικόνα 4-15: <https://www.geogebra.org/m/K7cDMUC7#chapter/163922>
<https://www.geogebra.org/m/K7cDMUC7>